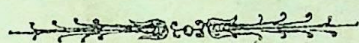
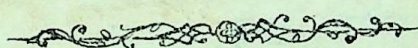
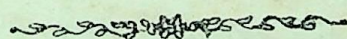
॥ रेखागणित ॥

। पहला भाग ।

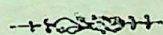
। जिस में पहला और दूसरा अध्याय है ।

श्रीमन्महाराजाधिराज पश्चिम देशाधिकारी श्री युत

लेफ्टनेंट गवर्नर बहादुर की

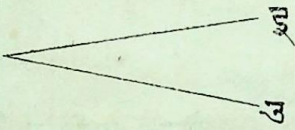
आज्ञानुसार

पश्चिमदेशीय पाठशालाओं के विद्यार्थियों के अभ्यास

के लिये

पंडित मोहन लाल ने पण्डित श्रीलाल की सहायता से अंगरेज़ी

से हिन्दी भाषा में उल्था किया

आगरा

सदरजइलख़ानह के छापेख़ाने में पंडित केशरीदास की मार्फ़त से

छापी गयी

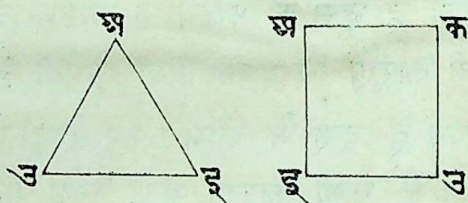
॥ सन १८६२ ईसवी ॥

रेखागणित का सूची पत्र

॥ रेखा गणित ॥

रेखा गणित शिल्प विद्या का अति उपयोगी है अर्थात् यंत्र और कलों की रचना में इस का बहुधा काम पड़ता है इस के पढ़ने से गणित की उपपत्ति जानी जाती है इसी कारण सिद्धान्त विद्या में भी इस का बहुधा प्रयोजन पड़ता है इस में कोन और रेखा का आलम्ब ले के गणित होता है इसी कारण इसे रेखा गणित कहते हैं पाटी और बीज के गणित में बहुत से अंक और वर्ण मिटेलने और बनाने पड़ते हैं तब कहीं गणित का फल सिद्ध होता है परन्तु यह ऐसी विद्या है कि जिस के पढ़ने में मनुष्य अपनी बुद्धि ही से समझ कर गणित की शुद्धता वा अशु-द्धता पुस्तक पर ही बता सक्ता है और उस गणित से कर-ने में उस को कुछ श्रम भी नहीं होता फिर इस विद्या के बल से मनुष्य ऊंचाई निचाई और दूरी का प्रमाण भी निःस-न्देह बता सक्ता है इस लिये विद्यार्थियों को उचित है कि मन लगा के श्रम से इस ग्रंथ को पढ़ कर मनुष्य देह का फल, चतुराई और जगत में यश पावें ॥

इसी लिये लोगों का हित बिचार अंगरेज़ी से हिन्दीभाषा में उलथा कर के छप वाया है ❋

इस विद्या में जो रेखा कहनी होती है उस के केवल आदि और अन्त के अक्षर कहते हैं यथा (अ इ) रेखा कहने से (अ) और (इ) के बीच वाली रेखा लेंगे जैसा अ ———— इ, जिस कोने को कहना होगा उस के ऊपर वाले अक्षर को बीच में बोलेंगे जैसा (इ अ उ) कोन कहने से (अ) बिन्दु पर का कोना समझ लेते हैं ❋

कितने ही भुज का कोई क्षेत्र कहना होता है तो उस के कोन पर के अक्षर कहते हैं जैसा (अ इ उ) त्रिभुज (अ ई उ क) चतुर्भुज ❋

परन्तु चतुर्भुज में साम्हने के कोने के दो अक्षर कहने से भी चतुर्भुज को समझ लेते हैं जैसा ऊपर (अ इ उ क) चतुर्भुज कहा है उसे (अ उ) वा (इ क) चतुर्भुज भी कहते हैं ऐसे ही और भी जानो ❋

इस ग्रंथ के बीच व्यवहार में सर्बत्र सरल रेखा और सरल कोन जानो ❋

जिस साध्य में जिस २ परिभाषा वा पूर्व साध्य की अपेक्षा है वे पुस्तक की आयुष पै लिख दिये हैं परिभाषा अबाध्य और स्वयं सिद्ध इन के आद्य अक्षर लिख के उन के आगे उन की संख्या के अंक और साध्य का (सा) लिखकर उस के

आगे साध्य की संख्या का अंक लिखा है तथा कल्पना करने का (क) और बनाने का (क्र) चिन्ह भी आयुष पै लिखा है ॥

रेखा गणित की उपयोगी परिभाषा

१ बिन्दु उसे कहते हैं जिस का केवल स्थान तो नियत हो पर कोई परिमाण न हो और न विभाग हो सकें ॥

बिन्दु एक ऐसा पदार्थ है जिस का स्थान तो नियत होता है पर उस में लम्बाई चौड़ाई या मुटाई कुछ भी नहीं होती और ऐसे (॰) चिन्ह को जो बिन्दु कहते हैं वह केवल उस का स्थान दिखाने के लिये है क्योंकि ऐसे चिन्ह का क्या ठीक है इस्से छोटे भी हो सक्ते हैं जैसा ॰॰॰॰॰॰॰ इसी रीति से छोटे से छोटा बिन्दु करेंगे तो वही बात सिद्ध होगी कि जिस का स्थान तो नियत हो पर परिमाण न हो और जिस का परिमाण न होगा उस के विभाग भी न हो सकेंगे ॥

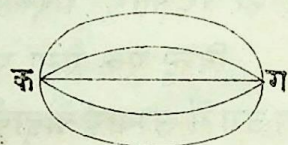
२ रेखा वह है जिस में केवल लम्बाई हो पर चौड़ाई न हो ॥

रेखा में चौड़ाई नहीं होती किन्तु केवल लम्बाई होती है व्यवहार में जो ऐसी (————) लकीर को रेखा कहते हैं वह रेखा का केवल आकार बताने के ही लिये है और उस का शुद्ध स्वरूप तो दो बिन्दुओं की दूरी है जैसा (क ग) रेखा कहने से (क) और (ग) बिन्दुओं की दूरी जानी जाती है जैसा क॰ ॰ग ॥

३ रेखा के छोर बिन्दु होते हैं ✣

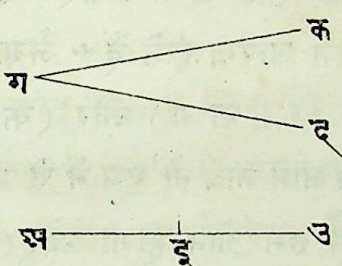
बालकों को इस बात का समझना कठिन है परन्तु आगे कुछ पढ़ेंगे तो वे इस बात का आशय समझ लेंगे ✣

४ सरल वा सूधी रेखा वह है जो दो बिन्दुओं के बीच में सब से छोटी हो सक्ती है ✣

दो बिन्दुओं के बीच में ऐसी कई रेखा खिंच सक्ती हैं कि जिन के छोर वे ही बिन्दु हों कल्पना करो कि एक गिरह के अन्तर से (क) और (ग) दो बिन्दु हैं अब उन के बीच में ऐसी कई रेखा खींच सक्ते हैं कि जिन के छोर पे वे ही (क) और (ग) बिन्दु होंगे यथा कग, कग आदि इन सब रेखाओं को मापो तो सब से छोटी रेखा गिरह भर की ही होगी जैसा कि यहां सब के बीच की है अब इस से छोटी कोई रेखा नहीं हो सक्ती इस कारण यही सूधी रेखा कहावेगी और शेष सब को टेढ़ी कहेंगे ✣

५ धरातल वह है जिस में केवल लम्बाई और चौड़ाई ही पाई जाय ✣

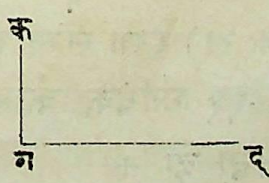
दर्पणो दर का जो ऊपर से पेटा दिखाई देता है वा हाथ फेरने से छूने में आता है वही धरातल है उस में मुटाई नहीं होती क्योंकि मुटाई होने से पिंड हो जाता है ✣

६ धरातल की सीमा रेखा होती है ✣

इस का आशय समझने में भी वैसा ही जानो जैसा कि दूसरी परिभाषा के लिये लिख आये हैं ✣

७ सम धरातल वा दर्पणो दर धरातल वह है जिस

में कहीं भी दो बिन्दु लेकर उन के बीच में जो रेखा की जाय वह उस धरातल से बाहर न हो ❖

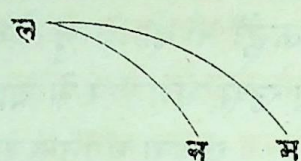
अथवा धरातल के किसी दो चिन्हों के बीच रेखा करो और वह रेखा उसी धरातल पे रहे वा किसी डोरी का एक छोर एक बिन्दु पर और दूसरा तान कर दूसरे बिन्दु पर रखने में उस डोरी का सब पेटा धरातल को छूता रहे तो उसे सम धरातल जानो ❖

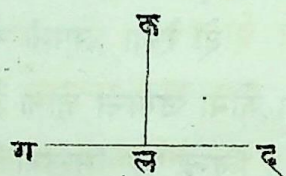
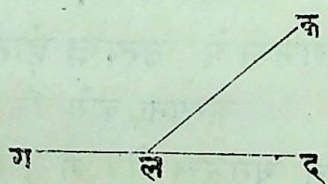
८ दर्पणोदर कोन दो रेखाओं के ऐसे झुकाव को कहते हैं कि वे रेखा मिल जायं पर मिल कर एक सूधी रेखा न हो जायं ❖

दो रेखा अपनी २ सूध में बढ़ कर एक दूसरी से मिल जाती हैं तो कोना उत्पन्न होता है जैसा (क ग) और (ग द) रेखा (ग) चिन्ह पर मिलती है उस से (क ग द) कोण हुआ परन्तु (अ ई) और (उ ई) दो रेखा (ई) चिन्ह पर मिल कर एक सूधी रेखा हो जायं जैसा

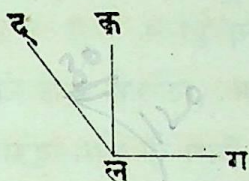
तो रेखा गणित में (अ ई उ) कोन नहीं समझा जायगा ❖

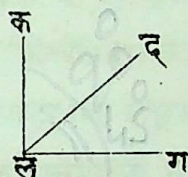
९ सरल कोन वह है जो सूधी दो रेखाओं से सम धरातल पे उत्पन्न होता है ❖

कल्पना करो कि (क ग) और (ग द) दो सूधी रेखा सम धरातल में (ग) चिन्ह पर मिली है इसी से (क ग द) यह सरल कोन हुआ जैसा और टेढ़ी रेखा हों जैसी

कि (म ल) और (न ल) हैं तो यह सरल कोन नहीं कहावेगा ❋

१० एक सूधी रेखा दूसरी सूधी रेखा पर खड़ी की जाय और उस खड़ी रेखा के आस पास के दोनों कोन आपस में समान हों तो उन में से प्रत्येक कोना सम कोन और वह खड़ी रेखा दूसरी रेखा पै लम्ब होगी उन आस पास के कोनों को आसन्न कोन कहते हैं ❋

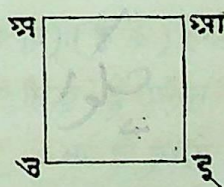
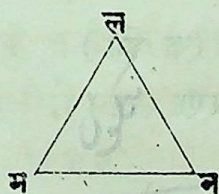
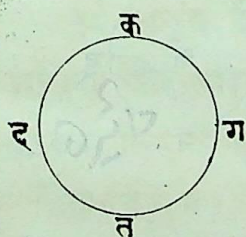
(ग द) आड़ी रेखा का सिरा छोड़ उस पर (क ल) एक सूधी खड़ी रेखा का योग करने से दो कोने उत्पन्न होते हैं ❋ जैसा

(क ल ग) और (क ल द) ये कोने किसी प्रकार से तुल्य जाने जायं तो इन में से प्रत्येक अर्थात् (क ल ग) और (क ल द) सम कोन होगा और (ग द) रेखा पर (क ल) रेखा लम्ब होगी परन्तु (ग द) सूधी रेखा पर (क ल) सूधी रेखा ऐसी खड़ी की जाय कि जिस्से (क ल द) और (क ल ग) कोने आपस में तुल्य न हों तो न तो वे सम कोन होंगे और न (क ल) रेखा लम्ब होगी ❋

११ अधिक कोन वह कोना होता है जो सम कोन से बड़ा हो ❋

कल्पना करो कि (क ल ग) सम कोन है और (द ल ग) उससे बड़ा है तो (द ल ग) अधिक कोन होगा ॥

१२ न्यून कोन वह है जो सम कोन से छोटा हो ॥

कल्पना करो कि (क ल ग) सम कोन है और (द ल ग) उस से छोटा है तो (द ल ग) न्यून कोन होगा ॥

१३ सब पदार्थों के छोरों को सीमा कहते हैं ॥

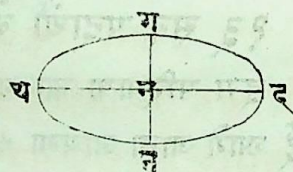
इस परिभाषा का आशय भी दूसरी और छटी परिभाषा की नाईं आगे जाना जायगा ॥

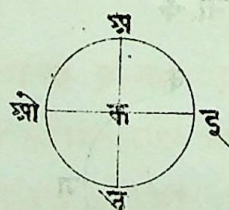
१४ क्षेत्र वह है जो एक आदि रेखा से घिरा हो ॥

जैसा (क ग त द) क्षेत्र एक रेखा से (ल म न) तीन रेखाओं से और (अ आ इ उ) चार रेखाओं से घेरा गया है ऐसे और भी जानो ॥

१५ दर्पणोदर वृत्त क्षेत्र उसे कहते हैं जो एक रेखा अर्थात् परिधि से घिरा हो और उस के अन्तर्गत

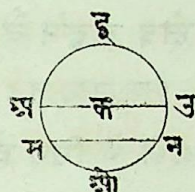
एक बिन्दु से परिधि तक जितनी रेखा खींची जायं वे सब तुल्य हों ॥

जैसा (अ आ इ उ ओ औ) यह क्षेत्र एक रेखा अर्थात् परिधि से घिरा हो और इस के बीच का जो (क) चिन्ह है उस से परिधि तक (क अ) (क आ) आदि जितनी रेखा खींची गई हों वे सब तुल्य हों तो (अ आ इ उ ओ औ) वृत्त क्षेत्र होगा॥

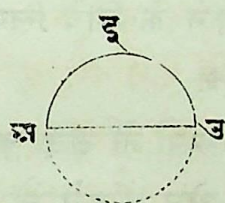
यद्यपि (ग द त थ) क्षेत्र भी एक रेखा से घिरा हुआ है परन्तु उस के अन्तर्गत न चिन्ह से निकल कर घेरने वाली रेखा तक जितनी रेखा पहुंची हैं वे तुल्य नहीं इसी कारण (ग द त थ) भी वृत्त क्षेत्र नहीं ॥

१६ केन्द्र वह बिन्दु है जिस से परिधि तक जितनी रेखा खींची जायं वे सब तुल्य हों ॥

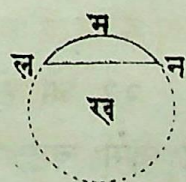
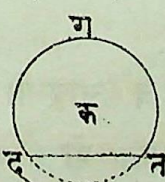
(अ इ उ ओ) वृत्त क्षेत्र में (क) बिन्दु से परिधि तक खींची गई (क अ) (क इ) (क उ) (क ओ) रेखा तुल्य हैं इसी कारण (क) बिन्दु केन्द्र है ॥

१७ व्यास वह सूधी रेखा कहाती है जो केन्द्र पे हो कर गई हो और जिस के दोनों छोर परिधि को छूते हों, व्यास के आधे को व्यासार्द्ध वा त्रिज्या

कहते हैं व्यास को छोड़ परिधि से परिधि तक जो सूधी रेखा गई हो उसे पूर्णज्या वा चाप कर्ण कहते हैं

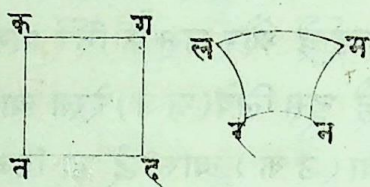
(अ इ उ ओ) वृत्त क्षेत्र का (क) केन्द्र है और (अ उ) सूधी रेखा केन्द्र अर्थात् (क) बिन्दु पै हो कर गई है और उस के सिरे परिधि को भी छूते हैं इस लिये (अ उ) रेखा व्यास और (अ क) वा (उ क) व्यासार्द्ध वा त्रिज्या है ॥

यद्यपि (म न) सूधी रेखा के सिरे भी परिधि को छूते हैं परन्तु वह केन्द्र पर हो कर नहीं गई इस लिये वह व्यास नहीं किन्तु पूर्णज्या वा चाप कर्ण है ॥

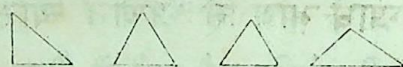
१८ वृत्तार्द्ध वह क्षेत्र है जो व्यास और परिधि के आधे भाग से अर्थात् व्यास के एक सिरे से दूसरे तक की परिधि की दूरी से घिरा होता है ॥

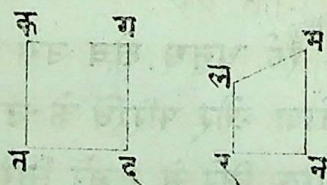
(अ इ उ) यह वृत्तार्द्ध क्षेत्र है क्योंकि यह परिधि के आधे भाग और व्यास से घिरा है ॥

१९ धनुष क्षेत्र उसे कहते हैं जो सूधी रेखा अर्थात् पूर्णज्या और परिधि के उस भाग से घेरा जाय जो कि पूर्णज्या के एक सिरे से दूसरे सिरे तक होता है

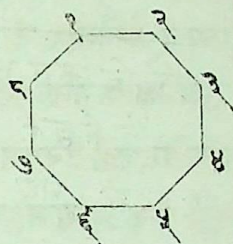
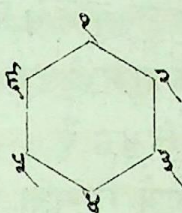
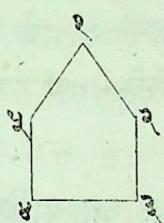
जैसा (द ग त) और (ल म न) ये दोनों धनुष क्षेत्र हैं परन्तु (क) केन्द्र (द ग त) के भीतर और (ख) केन्द्र (ल म न) से बाहर है इस

से जानो कि (द ग त) वृत्तार्द्ध से बड़ा है और (ल म न) वृत्तार्द्ध से छोटा है ❈

२० जो क्षेत्र सूधी रेखाओं से घिरा हो उसे ऋजु भुज क्षेत्र कहते हैं ❈

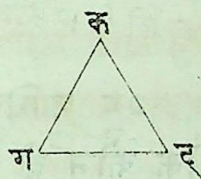
(क ग द त) क्षेत्र सूधी रेखाओं से घिरा है इस कारण यह ऋजु भुज क्षेत्र है परन्तु (ल म न र) टेढ़ी रेखाओं से घिरा है इस कारण यह ऋजु भुज क्षेत्र नहीं ❈

२१ त्रिभुज वा त्रिकोण वह क्षेत्र होता है जो कि तीन सूधी रेखाओं से घिरा होता है ❈

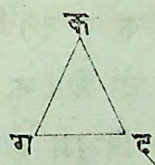
ये चार प्रकार के क्षेत्र जो तुम्हारे देखने के लिये लिखे हैं त्रिभुज हैं ❈

२२ जो क्षेत्र चार भुजाओं से घिरा होता है उसे चतुर्भुज क्षेत्र कहते हैं ❈

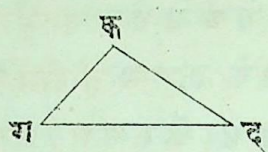
(क ग द त) और (ल म न र) ये दोनों क्षेत्र चतुर्भुज हैं ❈

२३ जो क्षेत्र चार से अधिक भुजाओं से घिरा होता है उसे बहुभुज क्षेत्र कहते हैं ❈

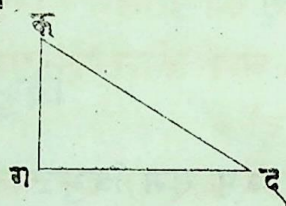
ये तीनों क्षेत्र जिन के क्रम से पांच छ: और आठ भुज हैं बहु भुज क्षेत्र हैं जैसा

त्रिभुज के भेद ✤

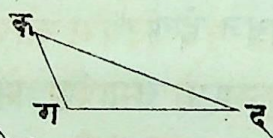
२४ सम त्रिभुज उसे कहते हैं जिस की तीनों भुजा समान हों ✤

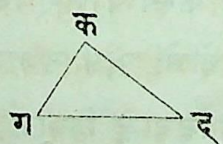
कल्पना करो कि (क ग द) त्रिभुज के (क ग) (ग द) और (द क) ये तीनोंभुज समान हैं तो (क ग द) यह त्रिकोन सम त्रिभुज होगा ✤

२५ सम द्विबाहु त्रिभुज उसे कहते हैं जिस के दो भुज समान हों उस के तीसरे भुज को आधार कहते हैं ✤

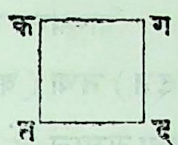
कल्पना करो कि (क ग द) त्रिभुज के (क ग) और (क द) ये दोनों भुज समान हैं तो (क ग द) यह सम द्विबाहु त्रिभुज होगा और (ग द) उस का आधार होगा ✤

२६ बिषम त्रिभुज वह है जिस की तीन में से कोई भुजा समान नहीं होती ✤

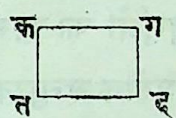
जैसा (क ग द) त्रिभुज में (क ग) (ग द) और (द क) इन में से किसी भुज का प्रमाण एकसा नहीं इसी लिये (क ग द) विषम त्रिभुज है ॥

२७ सम कोन त्रिभुज वा जात्य त्रिभुज उसे कहते हैं जिस में एक कोना सम कोन हो

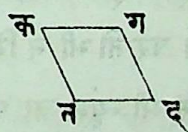
(क ग द) त्रिभुज में (क ग द) कोन सम कोन है इस लिये यह त्रिभुज सम कोन त्रिभुज है और इस को जात्य भी कहते हैं ॥

२८ अधिक कोन त्रिभुज वह है जिस में एक अधिक कोन हो ॥

(क ग द) त्रिभुज में (क ग द) कोन अधिक कोन है इस लिये (क ग द) त्रिभुज अधिक कोन त्रिभुज है ॥

२९ न्यून कोन त्रिभुज वह है जिस में सब कोन न्यून कोन होते हैं ॥

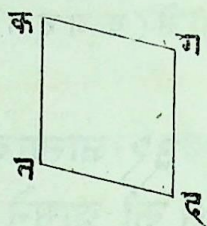
(क ग द) त्रिभुज में सब कोने न्यून कोन हों तो (क ग द) यह त्रिभुज न्यून कोन त्रिभुज होगा ॥

३० वर्ग क्षेत्र उस चतुर्भुज को कहते हैं जिस के चारों भुज आपस में समान हों और सब कोने भी सम कोन हों ॥

(क ग द त) चतुर्भुज के (क ग) (ग द) (द त) (त क) ये चारों भुज तुल्य हैं और कोने भी सम कोन हैं इसी से (क ग द त) चतुर्भुज वर्ग क्षेत्र है ॥

३१ जात्यायत वा सम कोण आयत क्षेत्र वह है जिस की आमने साम्हने की भुजा समान हों और कोने भी सम कोन हों पर सब भुजा एक दूसरी के समान न हों ॥

(क ग द त) इस चतुर्भुज में (क ग) और (त द) तथा (क त) और (ग द) भुजा समान हैं परन्तु (क ग) और (द त) से (क त) और (ग द) छोटी हैं कोने भी सब सम कोन हैं इसी से (क ग द त) यह आयत क्षेत्र है ॥

३२ विषम कोण चतुर्भुज वह क्षेत्र है जिस की भुजा तो आपस में सब समान होती हैं पर कोने सम कोन नहीं होते

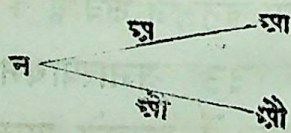
जैसा (क ग द त) इस चतुर्भुज की चारों भुजा आपस में समान हैं परन्तु सब कोने सम कोन अर्थात् तुल्य नहीं जैसा कि (ग द त) कोन से (द त क) कोन बड़ा है इसी हेतु से यह विषम कोण सम चतुर्भुज क्षेत्र है ॥

३३ अजात्यायत वा विषम कोण आयत वह है जिस में आमने साम्हने की तो भुजा तुल्य हों परन्तु सब भुजा आपस में तुल्य न हों और कोई कोन भी

सम कोन न हों ❋

कल्पना करो कि (क ग द त) चतुर्भुज में (क ग) और (द त) तथा (क त) और (ग द) साम्हने की भुजा समान हैं परन्तु (क त) और (ग द) ये दोनों (क ग) और (त द) से बड़ी हैं और कोने कोई भी सम कोन अर्थात् तुल्य नहीं ❋

३४ इन्हें छोड़ कर और जो चतुर्भुज हैं वे विषम चतुर्भुज कहाते हैं ❋

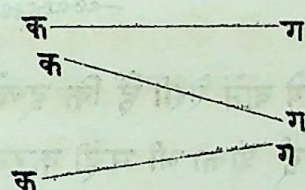
जैसे जो चतुर्भुज पहले कह आये हैं उन से इन नीचे के चतुर्भुजों का स्वरूप भिन्न है अर्थात् इन की प्रत्येक सन्मुख की दो २ भुजाओं में से कोई भी तुल्य नहीं इसी कारण ये विषम चतुर्भुज कहाते हैं ❋

३५ समानान्तर रेखा वे कहाती हैं जो एक ही धरातल में हों और उन्हें दोनों ओर को चाहे जितनी बढ़ाओ पर कभी मिलें नहीं ❋

समानान्तर रेखाओं के बीच में सदा समान ही अन्तर रहता है जैसा कि (क ग) और (ल म) रेखाओं के बीच में है ये चाहे करोड़ों कोस तक बढ़ाई जायँ पर तो भी न मिलेंगी और उन के बीच का अन्तर कहीं से भी कुछ भी न्यून वा अधिक न होगा परन्तु (अ आ) और (ओ औ) रेखा समानान्तर नहीं तो जिधर उन का थोड़ा अन्तर होगा उधर की ओर बढ़ाने से कहीं न कहीं (न) चिन्ह पर मिल जायँगी ❋

अबाध्योपक्रम

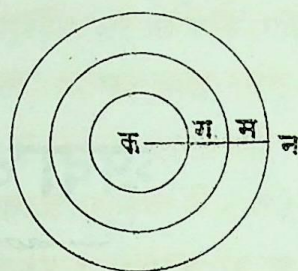
अबाध्य उसे कहते हैं जिसे सब लोग बिन तर्क किये अंगीकार कर लेते हैं इसी लिये इन क्रियाओं को जो नीचे लिखी हैं विना सिद्ध करे मान लिया है ❈

१ हमें यह सामर्थ है कि एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक सूधी रेखा खींच सक्ते हैं ❈

कल्पना करो कि (क) और (ग) दो बिन्दु हैं उन के बीचमें सूधी रेखा कर लेने में कुछ अटकाव नहीं चौथी परिभाषा देखो ❈

२ परिमित रेखा को उसी सूध में मन मानी बढ़ा सक्ते हैं ❈

देखो (क ग) परिमित सूधी रेखा है जिस के छोर (क) और (ग) हैं इस रेखा को इसी की सूध द ——क———ग—— त में (द) वा (त) तक बढ़ा देने का भी हम को अधिकार है ❈

३ दिये हुए बिन्दु को केन्द्र मान के चाहें जितनी बड़ी त्रिज्या से वृत्त बना सक्ते हैं ❈

कल्पना करो कि (क) बिन्दु है उसे केन्द्र जान मन मानी त्रिज्या से छोटा वा बड़ा वृत्त बना सक्ते हैं जैसा (क) केन्द्र दिया है उस पर (क ग) त्रिज्या से छोटा वृत्त (क म) से बिचला वृत्त और (क न) से बड़ा वृत्त बना सक्ते हैं ऐसे ही और भी जानो ॥

स्वयं सिद्ध परिभाषा

ये बातें ऐसी हैं कि इन्हें सब जान्ते हैं और इसी से इन में कोई शंका भी नहीं करता ॥

१ जितने पदार्थ किसी एक और पदार्थ के तुल्य होंगे वे सब आपस में तुल्य होंगे

जैसा (क) और (ग) समान हों तथा (ग) और (द) भी समान हों तो (क) और (द) भी समान होंगे ॥

क ग
द

२ तुल्य पदार्थों में तुल्य २ जोड़ा जाय तो वे योग फल भी समान होंगे ॥

जैसा (क) और (ग) समान हों और (द) और (त) भी समान हों तो (क) और (द) का योग फल अर्थात (क+द) (ग) और (त) के योग फल (ग+त) के समान होगा ॥

क　　ग
द　　त
क —— द　ग —— त

३ तुल्य पदार्थों में से तुल्य २ घटा दिया जाय तो शेष भी तुल्य ही बचेंगे

जैसा (क) और (ग) तुल्य हों और (द) और (त) भी तुल्य हों और फिर (क) में से (द) और (ग) में से (त) घटा दिया जाय तो शेष (क-द) और (ग-त) तुल्य ही बचेंगे ॥

क　　ग
द　　त
क　द　ग　त

४ अतुल्य पदार्थों में तुल्य २ जोड़ा जाय तो वे फल भी अतुल्य ही होंगे ॥

जैसा (क) और (ग) अतुल्य और (द) और (त) तुल्य हों तो (क) और (द) का योग फल (क+द) (ग) और (त) के योग फल (ग+त) के तुल्य नहीं होगा ॥

क　　ग
द　　त
क　द　ग　त

५ अतुल्य पदार्थों में से तुल्य घटाने से शेष अतुल्य ही रहते हैं ॥

जैसा (क) और (ग) अतुल्य और (द) और (त) तुल्य है अब (क) में से (त) को और (ग) में से (त) को घटा दिया तो शेष (क-द) और (ग-त) अतुल्य ही बचे ॥

क　　ग
द　　त
क　द　ग —— त

६ जितने पदार्थ किसी एक और पदार्थ से दूने होंगे वे आपस में सब तुल्य होंगे ॥

जैसा (द) से (क) और (ग) प्रत्येक दूना हो तो (क) और (ग) आपस में तुल्य ही होंगे ॥

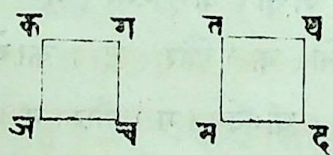
क ग
द

७ जितने पदार्थ किसी एक और पदार्थ के आधे के तुल्य होंगे वे आपस में सब तुल्य ही होंगे ॥

जैसा (क) यह (द) का आधा हो और (ग) भी (द) का आधा हो तो (क) और (ग) समान होंगे ॥

क ग
द

८ जो पदार्थ आपस में एक दूसरे को ढक लेते हैं वे तुल्य होते हैं ॥

जैसा (क ग च ज) और (त थ द न) दो चौखटे ऐसे हों कि पहले (क ग च ज) को दूसरे (त थ द न) पर रखने से ऊपर वाला चौखटा नीचे वाले सब चौखटे को ठीक २ ढक ले फिर दूसरे को भी पहले पर रख ले से पहला चौखटा दूसरे से सब ठीक २ ढक जाय तो जानो कि उन दोनों (क ग च ज) और (त थ द न) चौखटों के तल आपस में तुल्य हैं ॥

९ संपूर्ण पदार्थ अपने प्रत्येक खंड से बड़ा होता है (अ इ) रेखा के (क) चिन्ह पै खंड होते हों तो उन (अ क) और (इ क) प्रत्येक खंड से (अ इ) रेखा का संपूर्ण प्रमाण बड़ा होगा ॥

अ —— क —— इ

१ दो सूधी रेखाओं से क्षेत्र नहीं बंध सक्ता ॥

जैसा कि (द) और (त) दो सूधी रेखाओं से नहीं बंधता यद्यपि दो सूधी रेखाओं का एक एक छोर मिल भी सक्ता है जैसे कि (क) और (ग) रेखा (न) चिन्ह पर मिलती हैं परन्तु कोने के साम्हने की दिशा बिन बंधी ही रह जाती है इसी कारण दो सूधी रेखाओं से क्षेत्र नहीं बनता पर सूधी न हो अर्थात् टेढी हो तो दो वा एक रेखा से भी क्षेत्र बन सक्ता है ॥

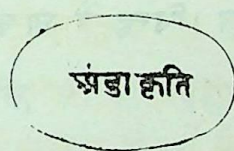
द

त

क

न

ग

जैसा

११ सब सम कोन आपस में समान होते हैं ॥

क्योंकि सम कोन एक परिमाण है जो कोन उस्से बड़ा होगा सो अधिक कोन और जो छोटा होगा सो न्यून कोन कहावेगा न कि सम कोन अर्थात अधिक कोन वा न्यून कोन को सम कोन न कहेंगे किन्तु जो सम कोन होगा वही सम कोन कहावेगा इसी लिये जितने सम कोन होंगे वे सब तुल्य होंगे ॥

जैसा कोई पदार्थ जो मन भर से न्यून वा अधिक होगा वह मन भर का न कहावेगा किंतु जो पूरा मन भर होगा वही कहावेगा

ग्रौर जितने पदार्थ मन २ भर के होंगे वे सब उस के तुल्य होंगे

१२ एक सरल रेखा सूधी दो ग्रौर रेखाग्रों से योग करे ग्रौर उस के एक ही ग्रोर जो दो कोन उत्पन्न हों वे दो सम कोन से न्यून हों तो वे दोनों रेखा उन कोनों की ग्रोर को बढ़ाने से मिल जायंगी ✢

जैसे (ग्र ड) ग्रौर (उ क) दो सूधी रेखाग्रों पर तीसरी रेखा (ग च) का योग हुग्रा ग्रब कल्पना करो कि (ड ग च) ग्रौर (क च ग) कोनों का योग दो सम कोन से न्यून है तो (ड) ग्रौर (क) छोरों की ग्रोर वे रेखा ग्रपनी सूध में बढ़ाई जायंगी तो (त) चिन्ह पै जा कर ग्रवश्य मिल जायंगी ✢

॥ रेखा गणित ॥

॥ प्रथम ग्रध्याय ॥

। इस ग्रध्याय में ग्रड़तालीस साध्य हैं ।

॥ १ साध्य ॥

दी हुई सूधी रेखा पर एक सम त्रिबाहु त्रिभुज बनाया चाहते हैं ॥

(अ इ) दी हुई सूधी रेखा है

इस पर सम त्रिबाहु त्रिभुज के बनाने की इच्छा है अब (अ इ) रेखा के (अ) चिन्ह को केंद्र मान (अ इ) त्रिज्या अर्थात् व्यासार्द्ध से (इ उ क) वृत्त बनाया ❖

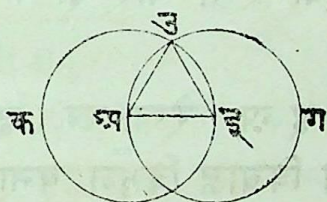
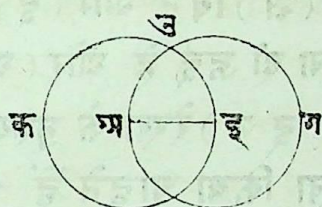
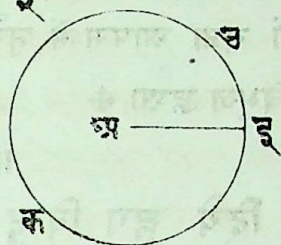
फिर उसी (अ इ) रेखा के (इ) चिन्ह को केन्द्र मान (इ अ) त्रिज्या से (अ उ ग) वृत्त बनाया ❖

कल्पना करो कि दोनों वृत्तों के जो दो खंडन के चिन्ह हैं उन में से एक पै (उ) चिन्ह है फिर (अ उ) और (इ उ) सूधी रेखा कर दो ❖

(अ इ उ) यह सम त्रिबाहु त्रिभुज हुआ ❖

॥ उपपत्ति ॥

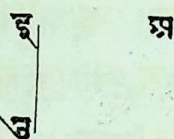
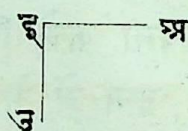
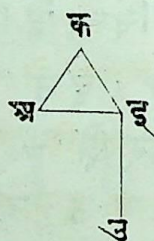
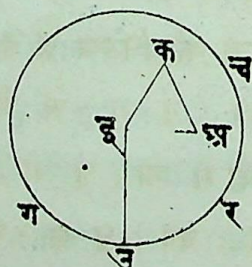
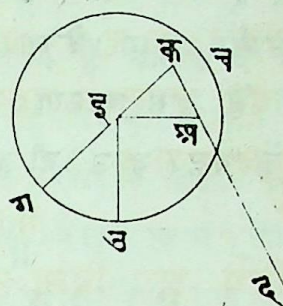
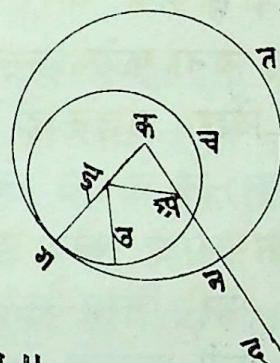
(अ इ) और (अ उ) रेखा तुल्य हैं क्योंकि ये दोनों रेखा (इ उ क) वृत्त के व्यासार्द्ध हैं ऐसे ही (इ अ) और (इ उ) रेखा भी तुल्य हैं कारण यह है कि वे दोनों (अ उ ग) वृत्त की त्रिज्या हैं ❖

(अ इ) रेखा प्रत्येक (अ उ) और (इ उ) रेखा के तुल्य है

इस कारण (अ उ) और (इ उ) रेखा भी तुल्य होंगी ✣

अर्थात् (अ इ उ) त्रिभुज की (अ इ) (अ उ) और (इ उ) तीनों भुजा आपस में तुल्य हैं इस कारण (अ इ उ) त्रिभुज सम त्रिभुज हुआ ✣

॥ २ साध्य ॥

दिये हुए बिन्दु से एक ऐसी सूधी रेखा किया चाहते हैं जो दी हुई एक सूधी रेखा के समान हो ✣

(अ) बिंदु और (इ उ) सूधी रेखा दी हुई है और (अ) चिन्ह से (इ उ) रेखा के तुल्य सूधी रेखा किया चाहते हैं ✣

प्रथम (इ) से (अ) तक सूधी रेखा कर दो ✣

(इ अ) रेखा पर (इ अ क) सम त्रिबाहु त्रिभुज बनाओ ✣

(इ) चिन्ह को केंद्र मान (इ उ) त्रिज्या से (उ ग च) वृत्त बनाओ ✣

(क इ) रेखा को (इ) की ओर अपनी सूध में बढ़ा कर वृत्त की परिधि से लगा दो वहीं (ग) चिन्ह जानो और (क ख) रेखा को अपनी सूध में (द) चिन्ह तक बढ़ा दो ॥

फिर (क) चिन्ह को केंद्र मान (क ग) त्रिज्या से (ग त न) वृत्त बनाओ और (क ख) रेखा को जो बढ़ाई थी वह वृत्त जहां काटे वहां (न) चिन्ह जानों (ख न) रेखा (इ उ) रेखा के समान होगी ॥

॥ उपपत्ति ॥

(इ) चिन्ह से निकली हुई (इ ग) और (इ उ) रेखा तुल्य हैं क्योंकि ये दोनों (ग च उ) वृत्त की त्रिज्या हैं

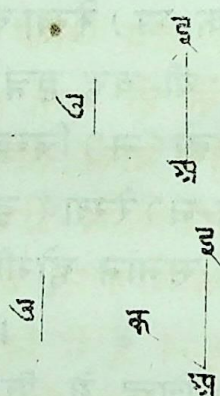
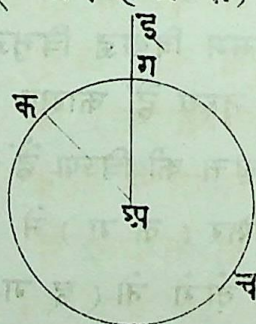
फिर (क इ) और (क ख) तुल्य हैं क्योंकि वे (क इ ख) सम त्रिबाहु त्रिभुज की भुजा हैं (क ग) और (क न) रेखा तुल्य हैं कारण यह है कि ये दोनों रेखा (ग त न) बड़े वृत्त की त्रिज्या हैं ॥

फिर (क ग) में से (क इ) और (क न) में से (क ख) घटा दोगे तो (इ ग) और (ख न) तुल्य बचेंगे और (इ ग) को (इ उ) के तुल्य अभी साध चुके हैं इस

लिये (ह ग) रेखा (इ उ) और (अ न) प्रत्येक के समान है अर्थात् (ह ग) रेखा (ह उ) के तुल्य है और (अ न) के भी है इस कारण (अ) चिन्ह से निकली जो (अ न) रेखा है वह (ह उ) दी हुई रेखा के तुल्य हुई ✣

॥ ३ साध्य ॥

दी हुई दो सूधी रेखाओं में एक छोटी है दूसरी बड़ी अब छोटी के तुल्य बड़ी में से एक खंड काटा चाहते हैं ✣

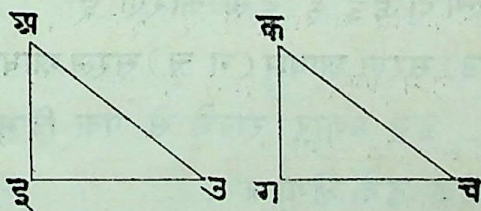
कल्पना करो कि (अ इ) बड़ी और (उ) छोटी है और (अ इ) में से (उ) के समान एक खण्ड काटा चाहते हैं तो (अ) चिन्ह से (अ क) रेखा ऐसी बनाओ जो (उ) के समान हो ✣

फिर (अ) चिन्ह को केंद्र मान (अ क) त्रिज्या से (क ग च) वृत्त बनाओ और उस वृत्त की परिधि से (अ इ) रेखा जहां कटे वहीं (ग) जानों (अ इ) रेखा का यही (अ ग) खण्ड (उ) के तुल्य होगा ✣

॥ उपपत्ति ॥

(अ ग) और (अ क) रेखा तुल्य हैं क्योंकि ये दोनों एकही (क ग च) वृत्त की त्रिज्या हैं परन्तु (अ क) और (उ) रेखा भी तुल्य हैं क्योंकि (उ) रेखा के तुल्य (अ क) रेखा बनाई है इस कारण (अ क) रेखा (अ ग) और (उ) प्रत्येक रेखा के तुल्य हुई अर्थात् (अ क) रेखा (अ ग) के तुल्य हुई और (उ) रेखा के भी तुल्य हुई इस कारण (अ ग) और (उ) रेखा भी आपस में तुल्य हुईं ॥

॥ ४ साध्य ॥

दिये हुए किसी एक त्रिभुज के दो भुज दूसरे त्रिभुज के दो भुजों के तुल्य हों और उन्हीं दोनोंभुजों के बीच वाले कोने भी तुल्य हों तो एक त्रिभुज के आधार पै के शेष दो कोने दूसरे त्रिभुज के आधार पै के शेष दो कोनों के तुल्य होंगे अर्थात् वे कोण तुल्य होंगे जिन के सन्मुख की भुजा तुल्य हैं वे आधार तुल्य होंगे और दोनों त्रिभुज भी आपस में तुल्य होंगे। कल्पना करो कि (अ इ उ) और (क ग च) ये दो ऋजु भुज त्रिभुज हैं ॥

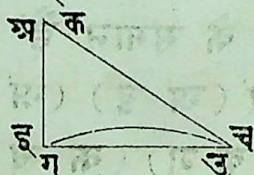
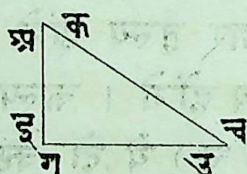
इन की (अ इ) भुज (क ग) के और (अ उ) (क च) के समान हैं

और (अ इ) (अ उ) भुजों के बीच का (अ) कोन (क ग) (क च) भुजों के मध्य वाले (क)

कोने के तुल्य है तो (इ उ) आधार पै के (अ इ उ) और (अ उ इ) कोन (ग च) आधार पै के (क ग च) और (क च ग) कोनों के तुल्य होंगे अर्थात् (अ इ उ) कोन (क ग च) कोन के और (अ उ इ) कोन (क च ग) कोन के (इ उ) आधार (ग च) आधार के और (अ इ उ) त्रिभुज (क ग च) त्रिभुज के तुल्य होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ) त्रिभुज को (क ग च) त्रिभुज पै ऐसी रीति से रक्खो कि (अ इ) सरल भुजा (क ग) सरल भुजा पै हो और (इ) बिंदु (ग) से मिल जाय तो (अ) बिंदु भी (क) से मिल जायगा क्योंकि (क ग) के तुल्य (अ इ) दी हुई है और (अ उ) सरल भुजा भी (क च) सरल भुजा से मिल जायगी क्योंकि (अ) सरल कोन (क) सरल कोन के तुल्य दिया हुआ है इसी से (अ उ) भुजा का (उ) चिन्ह (क च) भुजा के (च) चिन्ह पर पड़ेगा क्योंकि (क उ) (क च) के तुल्य दी हुई है इसी कारण (इ उ) सरल आधार (ग च) सरल आधार पर ठीक स्थित हो जायगा।

इस प्रकार रखने से एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को ठीक ठीक ढक लेगा ॥

कोई कहे कि (इ उ) आधार (ग च) आधार पै न पड़ेगा किंतु

नीचे लिखा है वैसा ही रहेगा ऐसा होगा ॥

तो (इ उ) और (ग च) दो सूधी रेखाओं से क्षेत्र बन्ने लगेगा और यह बात असंभव है इसी से यह बात जानी जाती है कि (इ उ) आधार (ग च) आधार पै अवश्य मिल कर रहेगा और इसी कारण (अ इ उ) त्रिभुज (क ग च) त्रिभुज पै ठीक २ भर बैठेगा इस कारण (अ इ उ) त्रिभुज के (उ इ) आधार पै के (इ) और (उ) कोन भी (क ग च) त्रिभुज के (ग च) आधार पै के (ग) और (च) कोनों के क्रम से एक दूसरे के तुल्य होंगे अर्थात् (अ इ उ) त्रिभुज (क ग च) त्रिभुज के सर्वथा तुल्य होगा ॥

स ११

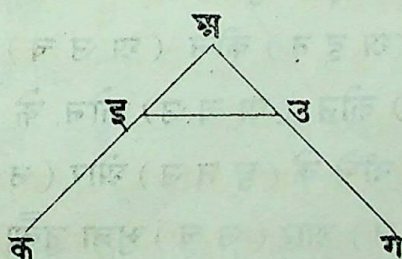
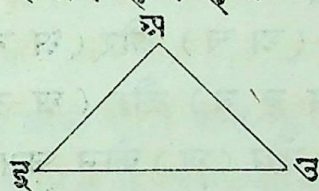
॥ ५ साध्य ॥

सम द्विबाहु त्रिभुज में आधार पै के दोनों कोने आपस में समान होते हैं और उन तुल्य भुजाओं को अपनी सूध में बढ़ाने से आधार के नीचे जो दो कोने उत्पन्न होते हैं वे भी आपस में समान होते हैं ॥

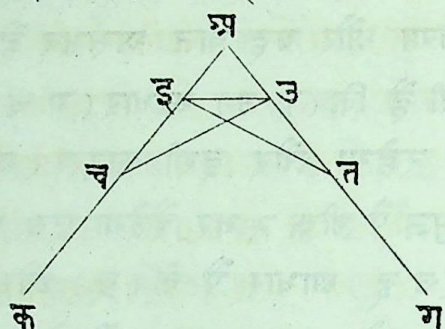
अ

इ उ

(अ इ उ) सम द्विबाहु त्रिभुज की (अ इ) और (अ उ) भुजा तुल्य हों तो (इ उ) आधार पै के (अ इ उ) और (अ उ इ) कोन आपस में तुल्य होंगे ॥

फिर इसी समद्विबाहु की (अ इ) भुजा को (क) तक और (अ उ) को (ग) तक अपनी ही सूध

में बढ़ा दो तो (इ उ) आधार के नीचले (उ इ क) और (इ उ ग) कोन भी आपस में समान होंगे ॥

(इ क) रेखा में कहीं (च) चिन्ह कर लिया और (इ च) के

सा ३ तुल्य (उ त) खंड (उ ग) में से अलग कर लिया फिर (इ त) और (उ च) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ त) और (अ उ च) त्रिभुजों की (अ इ) और

क. र (अ उ) भुजा तुल्य हैं क्योंकि वे सम द्विबाहु त्रिभु-

क ज की भुजा हैं फिर (इ च) और (उ त) तुल्य हैं क्योंकि (इ च) के समान (उ त) अलग किया था इस कार-

स २ ण (अ च) और (अ त) भुजा तुल्य होंगी इस प्रकार (अ इ त) और (अ उ त) त्रिभुजों की दो दो भुजा तुल्य हैं और (अ) कोन उभय निष्ठ है इस कारण (अ इ त) त्रिभुज का (इ त) आधार (अ उ च) त्रिभुज के (उ च)

सा ४ आधार के तुल्य ॥

सा ४ (अ इ त) कोन (अ उ च) कोन के तुल्य और (अ त

सा ५ इ) कोन (अ च उ) कोन के समान हुआ तथा आधार के नीचे के (इ त उ) और (उ च इ) जो दो त्रिभुज हैं उनकी

क. (इ त) और (उ च) भुजा तुल्य हैं क्योंकि उन की तुल्यता

अभी सिद्ध करचुके हैं और (उ त) और (इ च) भुज तथा (इ त उ) और (उ च इ) कोने भी तुल्य हैं इसी से (इ उ त) और (उ इ च) कोने समान होंगे और (उ इ त) कोन (इ उ च) कोन के तुल्य होगा ॥

इस प्रकार आधार के नीचे के (इ उ त) और (उ इ च) कोने तो समान हुए ॥

(अ इ त) और (अ उ च) कोनों को पहले तुल्य साधचुके हैं और (उ इ त) और (इ उ च) कोनों को भी तुल्य कह चुके हैं अब (अ इ त) और (अ उ च) तुल्य कोनों में से (उ इ त) और (इ उ च) तुल्य कोने घटा दिये तो शेष (अ इ उ) और (अ उ इ) कोने तुल्य ही बचे । और वे दोनों कोने (इ उ) आधार पै के हैं ॥

॥ अनुमान ॥

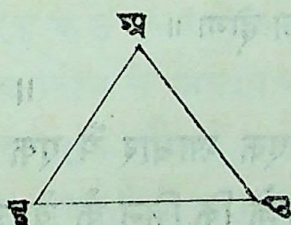
इस्से यह बात भी सिद्ध होती है कि सम त्रिभुज के सब कोने आपस में तुल्य होते हैं ॥

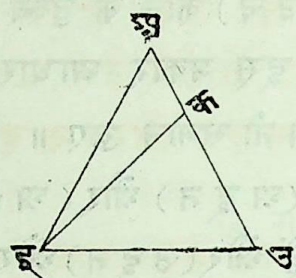
॥ ६ साध्य ॥

जिस त्रिभुज में दो कोने समान होंगे उस के तुल्य कोनों के साम्हने की भुजा भी आपस में तुल्य होंगी ॥

(अ इ उ) त्रिभुज में (अ इ उ) और (अ उ इ) कोन आपस में तुल्य हों तो (अ उ) और (अ इ) भुजा भी तुल्य होंगी ॥

अ

इ उ

॥ उपपत्ति ॥

(ञ इ उ) ग्रौर (ञ उ इ) कोने तुल्य हों तो (ञ उ) ग्रौर (ञ इ) भुजा ग्रवश्य तुल्य होंगी कदाचित् कोई कहे कि तुल्य न होंगी तो उन में से कोई सी एक बड़ी होगी कल्पना की कि (ञ इ) भुजा से (ञ उ) भुजा बड़ी है तो उस में से (इ ञ) के तुल्य (उ क) काटलो ग्रौर (इ क) रेखा करदो इस रीति से (ञ इ उ) ग्रौर (क इ उ) दो त्रिभुज ऊए जिन की (ञ इ) ग्रौर (क उ) भुजा तुल्य हैं (इ उ) भुजा उभय निष्ठ है ग्रौर उन तुल्य भुजोंके मध्यगत (ञ इ उ) ग्रौर (क उ इ) कोन भी तुल्य हैं इस कारण (ञ उ) ग्रौर (क इ) ग्राधार तुल्य होंगे ग्रर्थात् (ञ इ उ) ग्रौर (क इ उ) दोनों त्रिभुज तुल्य होंगे परंतु यह बात ग्रसंभव है

सा ३ ञ १ ह सा ४ सा ४

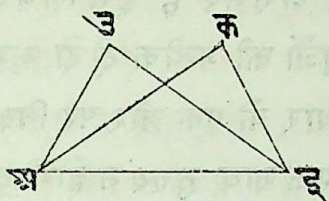
क्योंकि (ञ इ उ) बड़े त्रिभुज के ग्रंतर्गत (क इ उ) छोटा त्रिभुज संपूर्ण बड़े त्रिभुज के तुल्य ऊग्रा जाता है ॥

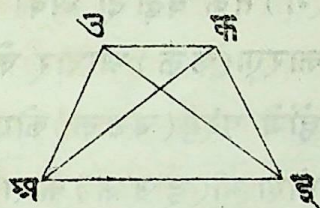
॥ फल ॥

इस्से यह बात भी सिद्ध होती है कि जिस त्रिभुज के तीनों कोने तुल्य होंगे उस की तीनों भुजा भी तुल्य होंगी ग्रर्थात् वह सम त्रिभुज होगा ॥

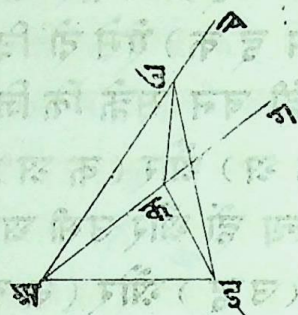
॥ ७ साध्य ॥

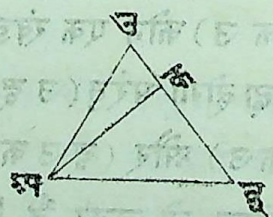
एक ग्राधार पै एक ही ग्रोर ऐसे दो त्रिभुज नहीं बन सक्के कि जिन के वे भुज तुल्य हों जो ग्राधार के एक छोर पै मिले हों ग्रौर उसी दशा में जो भुज दूसरे छोर पर मिलते हैं वे भी तुल्य हों ॥

(अ इ) आधार पै एक ही ओर (अ इ उ) और (अ इ क) ऐसे दो त्रिभुज नहीं बन सकें कि जिनकी (उ अ) और (क अ) भुजा तुल्य हों और उसी अवस्था में (उ इ) और (क इ) भुजा भी तुल्य हों ॥

॥ उपपत्ति ॥

कभी कोई कहे कि तुल्य ही होंगे तो यह जानो कि उन दोनों त्रिभुजों की स्थिति तीन प्रकार से होगी प्रथम स्थिति यह है कि एक त्रिभुज का शीर्ष कोन दूसरे त्रिभुज से बाहर हो जैसा कि ऊपर लिखा है यहां (उ) से (क) तक रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(उ अ) और (क अ) रेखाओं की तुल्यता के कारण (अ उ क) और (अ क उ) दोनों कोने तुल्य होंगे परंतु (अ उ क) कोन (इ उ क) कोन से बड़ा है तो (अ क उ) कोन भी (इ उ क) कोन से बड़ा होगा इस लिये (इ क उ) कोन जिस का (अ क उ) कोन एक खंड है (इ उ क) कोन से अवश्य अधिक बड़ा होगा परंतु (उ इ) और (क इ) भुज तुल्य हैं इस लिये (इ क उ) और (इ उ क) दोनों कोन तुल्य होंगे परंतु वह अभी सिद्ध हो चुका है कि (इ क उ) कोन (इ उ क) कोन से बड़ा है इस लिये (इ क उ) कोन (इ उ क) कोन के तुल्य

है और उस से बड़ा भी है पर यह असंभव है इस लिये दोनों त्रिभुजों की प्रत्येक दो दो भुजओ आधार के एक छोर पर मिलती हैं एक साथ तुल्य न होंगी दूसरे प्रकार में कल्पना करो कि एक त्रिकोण का शीर्ष कोण दूसरे त्रिभुज के अन्तर्गत है जैसा इस आकृति में है ॥

यहां भी (उ क) रेखा करके (अ उ) को (च) तक और (अ क) को (ग) तक बढ़ा दो अब (अ उ) और (अ क) भुजा की तुल्यता के कारण (उ क) आधार के नीचले (च उ क) (ग क उ) कोन तुल्य होंगे परंतु (च उ क) कोण (इ उ क) कोण से बड़ा है तो (ग क उ) कोण भी (इ उ क) कोण से बड़ा होगा इस लिये (इ क उ) कोण जिस का (ग क उ) कोन एक खण्ड है अवश्य (इ उ क) कोन से अधिक बड़ा होगा पर (इ उ) और (इ क) भुजों की समता से (उ क) आधार पे के (उ क इ) और (क उ इ) तुल्य होंगे और यह भी सिद्ध हो चुका है कि (इ क उ) कोन (इ उ क) कोन से बड़ा है इस लिये (इ क उ) कोन (इ उ क) कोन के तुल्य है और उस से बड़ा भी है परंतु यह असंभव है ॥

तीसरे प्रकार में कल्पना करो कि (क) शीर्ष कोण (अ इ उ) त्रिभुज की (इ उ) भुजा पर है जैसा इस आकृति में ऐसी कल्पना करने में संपूर्ण (इ उ) भुजा के तुल्य (इ क) भुजा होगी यह भी

असंभव है क्योंकि संपूर्ण पदार्थ अपने एक खंड के तुल्य हुआ जाता है ॥

॥ ८ साध्य ॥

एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दोनों भुजाओं के तुल्य हों और उन के आधार भी तुल्य हों तो उन दोनों त्रिभुजों के शीर्ष कोण समान होंगे कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज की (अ इ) और (अ उ) भुजा (क ग च) त्रिभुज की (क ग) और (क च) भुजाओं के तुल्य हैं तथा (इ उ) और (ग च) आधार भी तुल्य हैं तो उनके (इ अ उ) और (ग क च) शीर्ष कोण समान होंगे ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ) त्रिभुज को (क ग च) त्रिभुज पै ऐसी रीतिसे रक्खो कि (इ) चिन्ह (ग) चिन्ह पर हो और (इ उ) सरल आधार (ग च) सरल आधार पर रहा तो (उ) चिन्ह अवश्य (च) चिन्ह पर गिरेगा क्योंकि (इ उ) और (ग च) समान हैं ऐसे ही (अ इ) भुजा (क ग) भुजा पर और (अ उ) भुजा (क च) भुजा पर स्थित होगी ॥

कदाचित ऐसा मानों कि (इ उ) आधार तो (ग च) आधार पै रहेगा परंतु (इ अ) और

(उ अ) भुजा (ग क) और (च क) पर न रहेंगी तो कल्प ना करो कि (ग त) और (च त) की नाईं रहेंगी ॥

(ग त) और (च त) ये दोनों भुजा (इ अ) और (उ अ) भुजो के तुल्य हैं परंतु (ग क) और (च क) भुजा भी (इ अ) और (उ अ) के समान हैं इस कारण (ग क) और (च क) दोनों भुजा (ग त) और (च त) के समान होंगी इस से यह बात सिद्ध ऊई कि एक आधार पै उस की एक ही और दो ऐसे त्रिभुज बने हैं जिन की दोनों और की दो २ भुजा जो आधार के एक छोर पै मिली हैं तुल्य हैं ॥

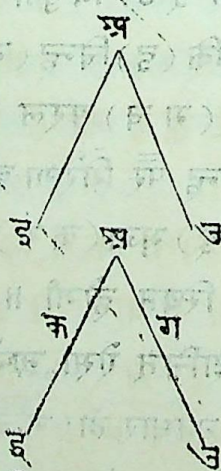
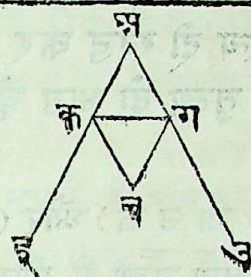
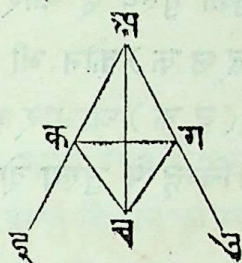
सा ७ पर यह असंभव है कोंकि ऐसा हो नहीं सक्ता इस्से यही बात सिद्ध होती है कि (इ उ) आधार (ग च) आधार पै रहैगा तो (इ अ) और (उ अ) भुजा अवश्य (ग क) और (च क) भुजाओं पै ही रहेंगी इसी कारण (अ इ उ) त्रिभुज का (अ) शीर्ष कोन (क ग च) त्रिभुज के (क) शीर्ष कोन पर रहैगा इस हेतु से वे दोनों शीर्ष कोन तुल्य होंगे ॥ स्व ८

॥ ८ साध्य ॥

दिये ऊए एक सरल कोन के समान दो भाग करने की रीति ॥

कल्पना करो कि (इ अ उ) सरल कोन के तुल्य दो भाग करने की इच्छा है ॥

(अ इ) रेखा में कहीं (क) चिन्ह कर दिया और (अ उ) में से (अ क) के तुल्य (अ ग) काट लिया ॥ सा ३

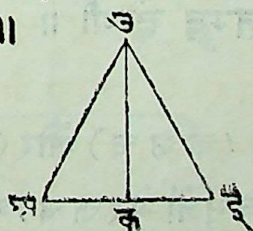
अ
इ   उ
अ
क   ग
इ   उ

फिर (क ग) रेखा करके उस पै (क ग च) सम त्रिभुज बनाया ॥ सा १

तो (अ च) सूधी रेखा करने से (इ अ उ) सरल कोन के तुल्य दो खंड हो जायँगे ॥

॥ उपपत्ति ॥

(क अ च) और (ग अ च) दो त्रिभुजों में (अ क) और (अ ग) तुल्य हैं, (क च) और (ग च) तुल्य हैं और (अ च) भुजा उभय निष्ठ है इस कारण (क अ च) कोन (ग अ च) कोन के समान होगा अर्थात् (इ अ उ) कोन के तुल्य दो खंड हो गये ॥ क्र० सा ८

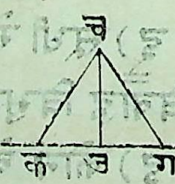
॥ १० साध्य ॥

दी हुई सूधी रेखा के तुल्य दो भाग करने की रीति ॥

कल्पना करो कि (अ इ) दी हुई सूधी रेखा है उस के समान दो भाग करने हैं ॥

(अ इ) सूधी रेखा पै (अ इ उ) सम त्रिबाहु त्रिभुज बनाओ और (अ उ इ) कोन के (उ क) रेखा से सा ९

सा ९ तुल्य दो खंड कर लो तो (क) चिन्ह पर (अ इ) रेखा के तुल्य दो भाग हो जायँगे ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ उ क) और (इ उ क) त्रिभुजों में (अ उ) और (इ उ) भुजा तुल्य हैं और (उ क) उभय निष्ठ हैं तथा (अ उ क) और (इ उ क) कोन भी आपस में तुल्य हैं इस लिये (अ क) और (इ क) आधार भी तुल्य होंगे अर्थात (अ इ) रेखा के (क) चिन्ह पे तुल्य दो खंड होगये॥

॥ ११ साध्य ॥

दी हुई रेखा के नियत चिन्ह पे से लम्ब करने का प्रकार ॥

यथा (अ इ) दी हुई सूधी रेखा में (उ) चिन्ह दिया हुआ है वहां से लंम्ब निकालना है अर्थात ऐसी सूधी रेखा खड़ी करनी है कि उस से और दी हुई रेखा से जो दो कोने उत्पन्न हों वे सम कोने हों॥

(अ उ) रेखा में कहीं (क) चिन्ह कल्पना कर लो और (उ इ) में से (उ क) के तुल्य (उ ग) अलग कर लो फिर (क ग) पर (क ग च) सम त्रिबाहु त्रिभुज बनालो और (उ) से (च) तक रेखा कर दो तो (अ इ) रेखा के (उ) चिन्ह पर (उ च) रेखा लम्ब होगी ॥

॥ उपपत्ति ॥

(क उ च) और (ग उ च) त्रिभुजों में (क च) और (ग च)

च
अ क उ ग इ

भुजा तुल्य हैं (उच) भुजा उभय निष्ठ है और (कउ) और (गउ) आधार भी तुल्य हैं इस लिये (कउच) और (गउच) दोनों कोने तुल्य होंगे ॥

परंतु ये आसन्न कोने हैं इस लिये इन में से प्रत्येक सम कोन होगा इसी कारण (अइ) रेखा के (उ) चिन्ह पै (उच) रेखा लम्ब हुई ॥

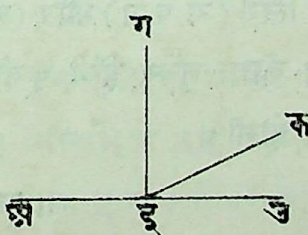
॥ अनुमान ॥

इस से यह भी जाना जाता है कि एक सूधी रेखा पै दूसरी सूधी रेखा मिला कर रक्खी जाय तो ऐसा न होगा कि उन का एक भाग तो मिल जाय और दूसरा न मिले ॥

कदाचित कोई कहे कि दो सूधी रेखाओं का योग संपूर्ण न होगा जैसा (अउ) और (अक) दो सूधी रेखाओं को मिला कर रक्खा तो (अइ) तक तो दोनों का मिल कर एक रूप हो जायगा और (इउ) और (इक) भाग न मिलेंगे ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अइउ) सूधी रेखा के (इ) चिन्ह पै (इग) लम्ब करने से (अइग) और (उइग) कोने सम कोन होंगे ॥

फिर कहते हैं कि (अइक) यह भी सूधी रेखा है तो (अइग) और (कइग) कोने भी सम कोन होंगे तो (गइक) और (गइउ) दोनों कोने सम कोन हुए इसी कारण (गइक) और (गइउ) कोने तुल्य होंगे परंतु यह असंभव है क्योंकि राशि का एक खंड संपूर्ण राशि के तुल्य नहीं हो सक्ता ॥

॥ १२ साध्य ॥

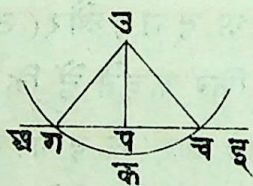
दी हुई एक अपरिमित रेखा से बाहर उस की एक ओर जो इष्ट विन्दु है वहां से उस रेखा पर लम्ब डालने की रीति ॥

कल्पना करो कि (अ इ) अपरिमित रेखा और उस से अलग एक ओर (उ) चिन्ह दिया है वहां से (अ इ) रेखा पर लम्ब डाला चाहते हैं ॥

रेखा से जिधर को (उ) चिन्ह हो उस से दूसरी ओर (क) चिन्ह कल्पना कर के (उ क) त्रिज्या से (क ग च) वृत्त बनालो उस वृत्त से (अ इ) रेखा कटे वहां (ग) और (च) चिन्ह जानो फिर (ग च) के तुल्य दो खंड (प) चिन्ह पै करो और (उ) से (प) तक रेखा कर दो तो वही (उ प) रेखा (अ इ) रेखा पै लम्ब होगी ॥ (अ ३, सा १, अ १)

(उ) चिन्ह से (ग) और (च) तक रेखा कर दो ॥ (अ १)

॥ उपपत्ति ॥

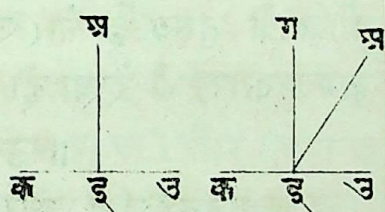
(ग प उ) और (च प उ) त्रिभुजों में (ग प) और (च प) आधार तुल्य हैं क्योंकि प्रत्येक आधार (ग च) का आधा है (उ ग) और (उ च) भी तुल्य हैं और (उ प) उभय निष्ट है इस लिये (ग प उ) और (च प उ) आसन्न कोण तुल्य होंगे इसी कारण (उ प) रेखा (अ इ) रेखा पै लम्ब होगी ॥ (क्ष ०, प १५, सा ८, प १०)

॥ १३ साध्य ॥

एक सूधी रेखा पै दूसरी सूधी रेखा का योग होने

से जो दो कोने उत्पन्न होते हैं उन में से या तो प्रत्येक कोना सम कोण होगा या उन दोनों का योग दो सम कोण के समान होगा कल्पना करो कि (अ इ) सूधी रेखा को (उ क) सूधी रेखा पर ऐसे ढब से खड़ा किया जिस्से (क इ अ) और (उ इ अ) दो कोने बन गये तो उन में से या तो प्रत्येक सम कोन होगा या उन दोनों का योग दो सम कोन के समान होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

(क इ) रेखा पर (अ इ) रेखा का योग करने से (क इ अ) और (उ इ अ) कोने तुल्य हों तो उन दोनों आसन्न कोनों में १० से प्रत्यक कोना सम कोन होगा अर्थात् (क इ अ) और (उ इ अ) दोनों सम कोन होंगे परन्तु (क इ अ) और (उ इ अ) कोने सम कोन न हों तो (क उ) रेखा ११ पर (इ ग) लम्ब करो उस से (क १० इ ग) और (उ इ ग) दो सम कोन बनजांयगे पर (उ इ अ) और (अ इ ग) कोने मिल कर (उ इ ग) सम कोन के तुल्य हैं अब (उ इ ग) कोन में (क इ ग) सम कोन मिलाओ तो (उ इ अ) (अ इ ग) (ग इ क) इन तीनों कोनों का योग दो सम कोनों के तुल्य होगा ॥

अ ग अ
क इ उ क इ उ

फिर (क इ ग) और (ग इ अ) इन दोनों कोने के योग (क इ अ) कोन में (अ इ उ) कोन मिलाने से वह योग भी दो सम कोन के तुल्य होगा अर्थात् (क इ अ) और (अ इ उ) दो कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य सिद्ध हुआ ॥

॥ १५ साध्य ॥

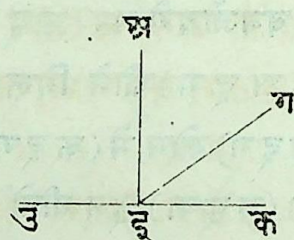
दो ओर से दो सूधी रेखा आके एक तीसरी रेखा के छोर पै मिलें वहां जो दो कोने उत्पन्न हों उन में से या तो प्रत्येक कोना सम कोन हो या उन दोनों का योग दो सम कोन के तुल्य हो तो वे दोनों रेखा एक ही सीध में होंगी अर्थात् उन को मिलकर एक ही सूधी रेखा हो जावेगी ॥

कल्पना करो कि (उ इ) और (क इ) दो सूधी रेखा हैं और (अ इ) तीसरी है इन्हों का योग (इ) चिन्ह पर हुआ है जिस से (उ इ अ) और (क इ अ) जो दो कोने उत्पन्न हुये हैं उन में से या तो प्रत्येक कोना सम कोन है वा उन दोनों का योग दो सम कोन के तुल्य है तो (उ इ) और (क इ) रेखा मिल कर एक सूधी रेखा हो जायगी ॥

॥ उपपत्ति ॥

कदाचित् (उ इ) और (क इ) रेखा एक सूध में न होंगी तो कल्पना करो कि (उ इ) और (ग इ) रेखा एक सूध में होंगी उन का (अ इ) रेखा के साथ योग होने से जो (अ इ उ) और (अ इ ग) कोने उत्पन्न होते हैं वे दो सम कोन के समान होंगे पर (उ इ अ) और (क इ अ) कोनों का योग भी दो सम कोनों के योग के तुल्य है इस लिये (उ इ अ) और (क इ अ) कोनों का योग (उ इ अ) और (ग इ अ) कोनों के योग के तुल्य होगा क्योंकि दोनों प्रत्येक दो

अ
ग
उ इ क

सा० १३
उ०

सम कोण के समान हैं अब इन दोनों योगों में से (उइअ) उ- स्व१३
भय निष्ठ कोन घटा दो तो शेष (कइअ) और (गइअ) कोन
तुल्य बचेंगे परंतु यह बात असंभव है क्योंकि संपूर्ण पदार्थ स्व २
अपने एक खंड के तुल्य इआ जाता है इस लिये (उइ) और
(इग) रेखा एक सूध में कदापि न होगी अर्थात् केवल (उइ)
और (इक) ही मिलकर एक सूधी रेखा में होगी॥

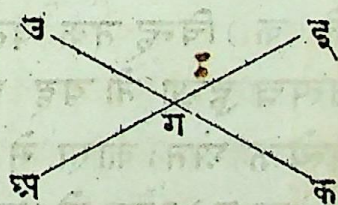
यह भी जान्ना चाहिये कि इक रेखा को छोड़ और कोई
रेखा उइ रेखा की सूध में न होगी इस कारण इक और
उइ रेखा एक सूध में होंगी॥

॥१५ साध्य॥

दो रेखाओं के आपस में कटने से जो चार कोने
उत्पन्न होते हैं उन में से एकांतर कोन अर्थात् सन्मुख
के दो दो कोने आपस में तुल्य होते हैं॥

यथा (अइ) और (उक) दो सूधी रेखा आपस में
(ग) चिन्ह पर कटती हों तो (उगअ) और (इगक)
ये दो सन्मुख कोन समान होंगे ऐसे ही (अगक) औ
र (उगइ) सन्मुख कोन भी समान होंगे॥

॥उपपत्ति॥

अग और उक दो सूधी रेखाओं के योग से जो
उगअ और अगक दो
कोन उत्पन्न होते हैं उन का
योग दो सम कोनों के तुल्य है सा१३
तथा (कग) और (अइ) दो सू-
धी रेखाओं के योग से जो (अगक) और (इगक) दो कोने

सा१३ उत्पन्न होते हैं उन का योग भी दो सम कोन के तुल्य है इ-
सी कारण (उ ग अ) और (अ ग क) दो कोनों का योग (अ ग
स्व ५ क) और (क ग इ) दो कोनों के योग के तुल्य है ॥

अब उन दोनों योगों में से (अ ग क) उभय निष्ठ को-
न घटा दिया तो शेष (उ ग अ) और (इ ग क) सन्मुख कोन
स्व३ समान बच रहे ऐसे ही (उ ग इ) और (अ ग क) सन्मुख को-
नों की भी समानता जानो ॥

॥ फल १ ॥

इस्से यह बात सिद्ध होती है कि दो सूधी रेखाओं के आ-
पस में कटने से जो एक चिन्ह पर चार कोने उत्पन्न होंगे उन
चारों का योग चार सम कोन के तुल्य होगा ॥

॥ फल २ ॥

एक बिंदु पै कई सूधी रेखाओं से जितने कोने उत्पन्न होंगे
उन सबों का योग चार सम कोन के तुल्य होगा ॥

॥ १६ साध्य ॥

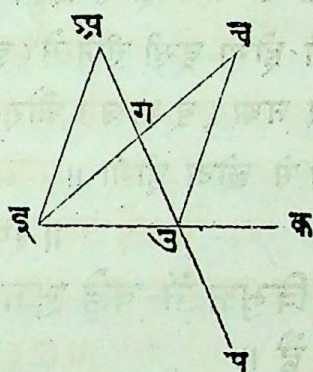
त्रिभुज की किसी एक भुजा के बढ़ाने से जो बहिः
कोन उत्पन्न होगा वह अपने आसन्न कोन को छोड़
कर त्रिभुज के प्रत्येक अंतः कोन से बड़ा होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज की (इ उ) भुजा
को (क) चिन्ह तक बढ़ाने से (अ उ क) बहिः कोन
उत्पन्न हुआ तो यह कोन (उ इ अ) और (इ अ उ)
प्रत्येक अंतः कोण से बड़ा होगा ॥

सा१० (अ उ) भुजा के (ग) चिन्ह पर तुल्य दो भाग कर
अ१ लो फिर (इ ग) रेखा करके उसे (ग) की ओर अपनी

सूध में बढ़ा दो और उस में से (इ ग) के तुल्य (ग च) काट लो फिर (च उ) रेखा कर दो ॥ अ २ अ १

॥ उपपत्ति ॥

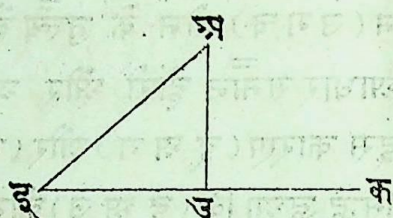
(अ ग इ) और (उ ग च) त्रिभुजों में (अ ग) और (उ ग) भुजा तुल्य हैं (इ ग) और (ग च) तुल्य हैं और (अ ग इ) कोन (उ ग च) कोन के तुल्य है इस लिये (अ इ) और (उ च) आधार समान होंगे और आधारों पै के कोने भी समान होंगे इस कारण (इ अ ग) और (ग उ च) कोने तुल्य हुए इसी से सिद्ध हुआ कि (इ अ उ) कोन (अ उ क) कोन से छोटा है इसी रीति से (इ उ) भुजा के तुल्य दो खंड कर के (अ उ) भुजा (प) चिन्ह तक बढ़ाई जाय तो यह बात सिद्ध हो सक्ती है कि (इ उ प) कोन से (अ इ उ) कोन छोटा है और इसी से (इ उ प) के तुल्य जो (अ उ क) कोन है उस से भी छोटा होगा ॥ सा १५

॥ १७ साध्य ॥

त्रिभुज के दो अंतः कोनों का योग दो सम कोन से छोटा होता है ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज है अब उस के चाहो जिन दो कोनों का योग करो वह योग दो सम कोन से छोटा ही होगा (इ उ) रेखा को (क) तक बढ़ा दो ॥ अ २

॥ उपपत्ति ॥

सा१६ (अउक) बहिः कोन अइउ कोन से बड़ा है उन दोनों में (अउइ) कोन मिलावें तो (अउक) और (अउइ) इन दो कोनों का योग (अइउ) और (अउइ) कोनों के योग से बड़ा होगा परंतु (अउक) और (अउइ) कोनों का योग

सा१३ दो सम कोनो के तुल्य है इस लिये (अइउ) और (अउइ) कोनों का योग दो सम कोन से छोटा होगा इसी रीति से (इअउ) और अउइ कोनों का योग तथा (इअउ) और (अइउ) कोनों का भी योग दो सम कोन से छोटा होगा ॥

॥ १८ साध्य ॥

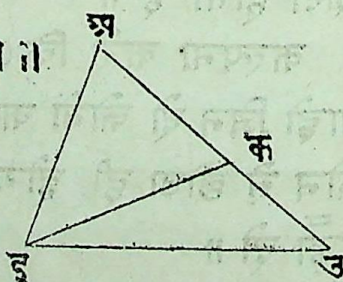
त्रिभुज में बड़े भुज के साम्हने का कोना बड़ा होता है ॥

(अइउ) त्रिभुज में (अइ) भुजा से (अउ) भुजा बड़ी हो तो (अइउ) कोन (अउइ) कोन से बड़ा होगा ॥

सा३ (अउ) में से (अइ) के तुल्य (अक) काट लो
अ१ और (इक) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(इकउ) त्रिभुज का (अकइ) बहिः कोण (कउइ) अंतःकोण

सा१६ से बड़ा है परंतु (अक) और (अइ)

भुजा समान हैं इस लिये (अ क इ) और (अ इ क) कोन तुल्य हैं इस कारण (अ इ क) कोन भी (अ उ इ) कोन से बड़ा है इ-सी से संपूर्ण (अ इ उ) कोन (अ उ इ) कोन से अवश्य बड़ा होगा

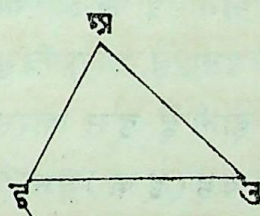
॥ १९ साध्य ॥

त्रिभुज में बड़े कोन के सन्मुख का भुज बड़ा होता है

(अ इ उ) त्रिभुज में (अ उ इ) कोन से (अ इ उ) कोन बड़ा हो तो (अ इ) भुजा से (अ उ) भुजा बड़ी होगी ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ) भुजा से (अ उ) भुजा को बड़ा न मानो तो वह तुल्य होगी वा छोटी होगी अच्छा पहले (अ इ) और (अ उ) को तुल्य कल्पना करो तो (अ उ इ) और (अ इ उ) कोने तुल्य होंगे परंतु यह असंभव है क्योंकि वे कोने तुल्य नहीं किंतु छोटे बड़े कह दि-ये हैं इस कारण (अ इ) और (अ उ) तुल्य तो नहीं होंगी ॥ सा ५

इस से अब (अ उ) भुजा को (अ इ) भुजा से छोटा मानो तो (अ उ इ) कोन से (अ इ उ) कोन छोटा होगा परंतु यह अनु-चित है क्योंकि जिस कोने को छोटा कल्पना किया था वह बड़े कोने से भी बड़ा हुआ जाता है इस लिये (अ उ) भुजा (अ इ) भुजा से छोटी भी नहीं होगी अर्थात् (अ उ) भुजा न तो (अ इ) के तुल्य है और न उस के समान है सो उस से अवश्य बड़ी होगी ॥

॥ २० साध्य ॥

त्रिभुज की कोई सी दो भुजाओं का योग शेष तीसरी

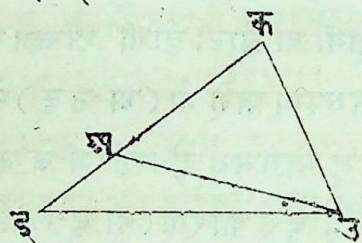
भुजा से बड़ा होता है ॥

(अ इ उ) एक त्रिभुज है उस के किसी दो भुजों का योग तीसरे भुज से अधिक है अर्थात (अ इ) (अ उ) का योग (इ उ) से बड़ा है ऐसे ही (अ इ) (इ उ) का योग (अ उ) से और (इ उ) (अ उ) का योग (अ इ) से बड़ा होगा ॥

अ १ सा ३ (इ अ) भुजा को बढ़ा कर उस में से (अ उ) के तुल्य (अ क) काटलो और (क उ) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ क) और (अ उ) समान हैं इस कारण (अ क उ)

सा ५ और (अ उ क) कोन समान होंगे परंतु (इ उ क) कोन (अ उ क) से बडा है इस लिये (इ उ क) कोन (अ क उ) अर्थात् (इ क उ) कोन से

सा १९ भी बडा है परंतु त्रिभुज में बड़े कोन के सन्मुख की भुजा बडी होती है इस कारण (इ क) भुजा (इ उ) भुजा से बडी होगी

रू पर वह (इ क) भुजा (इ अ) और (अ उ) के योग के समान है इस कारण (इ अ) (अ उ) का योग (इ उ) से बडा है इसी प्रकार (अ इ) और (इ उ) का योग (अ उ) से तथा (इ उ) और (अ उ) का योग (अ इ) से बड़ा होगा ॥

॥ २१ साध्य ॥

त्रिभुज के किसी एक भुज के दोनों छोरों से दो रेखा निकल कर उस त्रिभुज के भीतर ही किसी एक बिंदु पर

मिल जांय तो उन दो रेखाओं का योग, उस त्रिभुज की शेष दो भुजाओं के योग से छोटा होगा पर उन रेखाओं से जो कोन उत्पन्न होगा वह उन शेष भुजों से बने हुए कोन से बड़ा होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज है उस के (इ उ) भुजा के (इ) और (उ) छोरों से (इ क) और (उ क) रेखा निकलकर उसी त्रिभुज के भीतर (क) चिन्ह पर मिली हैं तो (इ क) और (उ क) का योग (अ इ) और (अ उ) के योग से छोटा होगा पर (इ क उ) कोन (इ अ उ) कोन से बड़ा होगा ॥

(इ क) को अपनी सूध में बढ़ा कर (अ उ) भुजा में जा लगाओ और उन के योग पै (ग) चिन्ह कर दो ॥

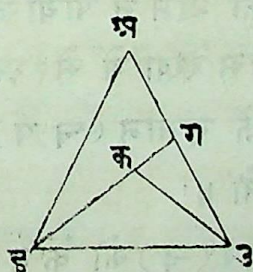
॥ उपपत्ति ॥

त्रिभुज में दो भुजों का योग एक भुज से बड़ा होता है इस लिये (अ इ) और (अ ग) का योग (इ ग) से बड़ा होगा इन दोनों में (ग उ) को जोड़ा तो (अ इ) और (अ उ) का योग, (इ ग) और (ग उ) के योग से बड़ा होगा ॥ सा २०

स

ऐसे ही (उ ग क) त्रिभुज में (उ ग) और (ग क) भुजों का योग (उ क) से बड़ा है इन में (इ क) जोड़ने से (उ ग) (ग इ) का योग (उ क) (क इ) के योग से बड़ा होगा परंतु (अ इ) (अ उ) का योग (इ ग) (ग उ) के योग से बड़ा सिद्ध हो चुका है इस कारण (अ इ) और (अ उ) का योग (इ क) और

स

(उ क) के योग से बड़त बड़ा है ॥

फिर त्रिभुज का वहिः कोन, आसन्न कोन को छोड़ त्रिभुज के प्रत्येक अंतः कोन से बड़ा होता है इस लिये (इ क उ) कोन, (उ ग क) कोन से बड़ा है और (उ ग क) कोन (इ अ उ) कोन से बड़ा है इस लिये (इ क उ) कोन (इ अ उ) कोन, से बड़त बड़ा होगा॥

सा १६
सा १६

॥ २२ साध्य ॥

एक ऐसा त्रिभुज बनाया चाहते हैं कि जिसकी तीनों भुजा दी हुई तीन रेखाओं के समान हों पर उन रेखाओं में से किसी दो रेखाओं का योग, शेष तीसरी रेखा से बड़ा हो ॥

कल्पना करो कि (अ) (इ) (उ) तीन ऐसी रेखा दी हुई हैं कि इन में से दो दो रेखाओं का योग तीसरी रेखा से बड़ा है अर्थात् (अ) (इ) रेखाओं का योग (उ) से (अ) (उ) का योग (इ) से और (इ) (उ) का योग (अ) से बड़ा है ॥

अब एक ऐसा त्रिभुज बनाना है कि जिस की तीनों भुजा क्रम से (अ) (इ) (उ) रेखाओं के तुल्य हों ॥

(क ग) एक ऐसी रेखा लो जो (क) की ओर तो नियत पर (ग) की ओर अनवधि हो अर्थात् (ग) की ओर उस का अंत न पाया जाय ॥

उस रेखा में से (अ) रेखा के समान (क च) रेखा, (इ) के समान (च प) और (उ) के तुल्य (प म) रेखा काटलो ॥

सा ३

फिर (च) को केंद्र मान (च क) त्रिज्या से (क ब ल)

वृत्त और (प) को केंद्र मान (पम) त्रिज्या से (मलब) वृत्त बनाओ जिस बिंदु पै ये दोनों वृत्त कटें वहां (ब) चिन्ह जानो फिर (बच) औ (बप) रेखा कर दो तो (बचप) एक त्रिभुज बन जायगा जिस की तीनों भुजा कल्पित (अ) (इ) (उ) रेखाओं के तुल्य होंगी॥

॥ उपपत्ति ॥

(कबल) वृत्त का (च) केंद्र है इस लिये (चब) और (चक) समान हैं परंतु (चक) (अ) के समान है इस लिये (चब) भी (अ) के समान है ऐसे ही (मलब) वृत्त का (प) केन्द्र है इस लिये (पम) और (पब) तुल्य हैं पर (पम) (उ) के समान है इस लिये (पब) भी (उ) के समान है और (चप) (इ) के समान ही है इस हेतु से (चब) (अ) के (चप) (इ) के और (बप) (उ) के समान हैं अर्थात (बचप) त्रिभुजकी भुजा क्रम से दी हुई (अ) (इ) (उ) रेखाओं के समान हैं॥

प १५

स्व १

प १५

क्र

॥ २३ साध्य ॥

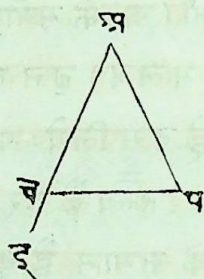
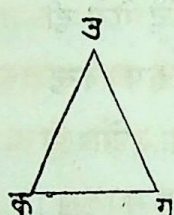
एक रेखा के किसी दिये हुए बिंदु पै ऐसा कोना बनाना चाहते हैं जो दिये हुए कोने के समान हो॥

कल्पना करो कि दी हुई (अइ) रेखा के (अ) चिन्ह पर ऐसा कोना बनाना चाहते हैं जो (कउग) दिये हुए कोन के समान हो॥

(कउग) कोन की (उक) रेखा के (क) चिन्ह से

अ १ (उ ग) रेखा के (ग) चिन्ह तक रेखा कर दो फिर (अ इ) रेखा पर (अ च प) ऐसा त्रिभुज बनाओ जिस के तीनों भुज क्रम से (उ क) (क ग) (ग उ) के समान हों अर्थात् (उ क) के समान (अ च), (उ ग) के समान (अ प) और (क ग) के समान (च प) हो तो (च अ प) कोन (क उ ग) कोन के समान होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

(क उ ग) और (च अ प) दोनों त्रिभुजों में (क उ) और (च अ) तथा (उ ग) और (अ प) तुल्य हैं और (क ग) आधार भी (च प) आधार के तुल्य है इस लिये (क उ ग) कोन (च अ प) कोन के समान हुआ ॥ सा ८

॥ २४ साध्य ॥

एक त्रिभुज के दो भुज दूसरे त्रिभुज के दो भुजों के समान हों पर एक का उन भुजों के मध्य का कोन दूसरे के उन भुजों के मध्यग कोन से बडा हो तो पहले त्रिभुज का आधार दूसरे त्रिभुज के आधार से बडा होगा ॥

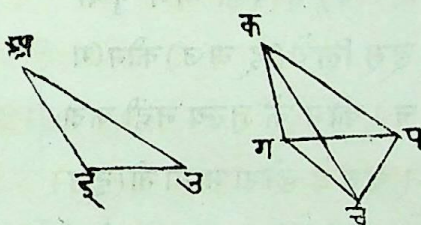
कल्पना करो कि (अ इ उ) और (क ग च) दो त्रिभुज हैं उन की (अ इ) और (क ग) तथा (अ उ) और (क च) भुजा तुल्य हैं परंतु (इ अ उ) कोन (ग क च) कोन से बडा है तो (इ उ) आधार (ग च) आधार से बडा होगा ॥

कल्पना करो कि यहां (क ग) भुजा (क च) भुजासे बडी नहीं है ॥

(क ग) रेखा के (क) बिंदु पर (ग क प) कोन ऐसा बनाओ जो (इ अ उ) कोन के तुल्य हो फिर (क प) सा ३ को (अ उ) अर्थात् (क च) के तुल्य कर के (ग प) (च प) सा ३ रेखा कर दो ॥ स्प १

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ) और (क ग प) त्रिभुजों में (अ इ) और (क ग) तथा (अ उ) और (क प) भुजा समान हैं और (इ अ उ) कोन (ग क प) कोन के तुल्य है इसी से (इ उ) आधार भी (ग प) आधार के समान है ॥ स्व० सा ४

(क प) और (क च) समान हैं इस लिये (क प च) कोन (क च प) कोन के तुल्य होगा परंतु (क प च) कोन (ग प च) कोन से बडा है इस कारण (क च प) कोन भी (ग प च) कोन से बडा होगा इसी से (ग च प) कोन (ग प च) कोन से और भी बडा होगा सा ५

परंतु त्रिभुज में बडे कोन के सन्मुख का भुज बडा होता है इस लिये (ग प) भुज (ग च) भुज से बडा है परंतु (इ उ) (ग प) के तुल्य है इस कारण (इ उ) भी (ग च) से बडा है ॥ सा १९ स्व०

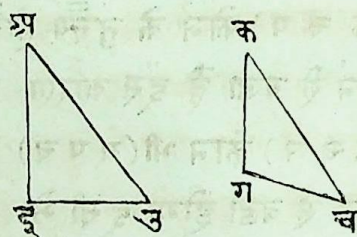
॥ २५ साध्य ॥

ऐसे दो त्रिभुज हों जिन के दो दो भुज तुल्य हों पर एक का आधार दूसरे के आधार से बडा हो तो बडे आधार वाले त्रिभुज का शीर्ष कोन छोटे आधार वाले त्रिभुज के शीर्ष कोन से बडा होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) और (क ग च) दो त्रिभुज हैं जिन में (अ इ) भुजा (क ग) भुजा के और (अ उ) भुजा (क च) भुजा के तुल्य है पर (इ उ) आधार (ग च) आधार से बड़ा है तो (इ अ उ) कोन (ग क च) कोन से बड़ा होगा ॥

(इ अ उ) कोन (क ग च) कोन से बड़ा न होगा तो या तो उस के तुल्य होगा वा छोटा होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

(इ अ उ) कोन को (ग क च) कोन के तुल्य मानो तो (इ उ) और (ग च) आधार भी तुल्य होंगे परंतु उन की तुल्यता होनी असंभव है क्योंकि (इ उ) को (ग च) से बड़ा मान चुके हो इस लिये (इ अ उ) कोन (ग क च) कोन के तुल्य नहीं कदाचित् उस से छोटा मानो तो (इ उ) आधार भी (ग च) आधार से छोटा होगा पर यह बात भी नहीं बन सकी क्योंकि जिस को बड़ा माना था वह अब छोटा हुआ जाता है इस लिये (इ अ उ) कोन (ग क च) कोन से छोटा भी नहीं हो सक्ता पर जब कि (इ अ उ) कोन (क ग च) कोन से न तो छोटा है और न उस के तुल्य है तो अवश्य बड़ा होगा ॥

सा २४

अ, क, इ, उ, ग, च

॥ २६ साध्य ॥

दो त्रिभुजों के दो दो कोने और एक एक भुज भी समान हों तो उन के शेष दो दो भुज और तीसरे कोन भी तुल्य होंगे पर वे तुल्य भुज एक ही दिशा के हों अर्थात्

या तो दोनों तुल्य कोनों के साम्हने के हों या उनके बीच के हों ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) और (क ग च) त्रिभुजों के (अ इ उ) और (क ग च) कोन तथा (अ उ इ) और (क च ग) कोन तुल्य हैं और उन के बीच की (इ उ) और (ग च) भुजा भी तुल्य हैं तो शेष (अ इ) और (क ग) भुजा तथा (अ उ) और (क च) भुजा और तीसरे (इ अ उ) और (ग क च) कोन भी तुल्य होंगे ॥

॥ उपपत्ति ॥

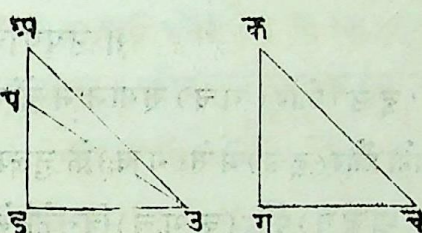
(अ इ) (क ग) के समान न हो तो एक दूसरे से बड़ा होगा अच्छा कल्पना करो कि (अ इ) (क ग) से बड़ा है तो (अ इ) में से (क ग) के समान (इ प) काँट लो और (प उ) रेखा कर दो अब देखो (प इ उ) और (क ग च) त्रिभुजों में (इ प) और (ग क) भुजा और तथा (इ उ) और (ग च) भुजा तुल्य हैं (प इ उ) और (क ग च) कोने भी समान हैं इसी से (प उ) और (क च) आधार और इसी हेतु से (प इ उ) और (क ग च) त्रिभुज भी तुल्य होंगे तो उन के शेष कोने भी समान होंगे इस हेतु से (इ उ प) कोन (क च ग) कोन के समान होगा और इसी से (इ उ अ) कोन के भी तुल्य होगा पर यह बात असंभव है क्योंकि राशि का एक खंड संपूर्ण राशि के समान हुआ जाता है इस लिये (अ इ) और (क ग) अतुल्य नहीं किंतु तुल्य ही हैं ॥

सा ३

क

क

सा ४

स्व ९

अब (अ इ उ) और (क ग च) त्रिभुजों के (अ इ) और (क ग) भुजा तुल्य हुए ॥

(इ उ) और (ग च) भुज तुल्य दिये ही हुए हैं और (अ इ उ) कोन भी (क ग च) कोन के तुल्य है इस कारण (अ उ) और (क च) आधार तुल्य और (इ अ उ) कोन (ग क च) कोन के तुल्य होगा ॥

सा ४

पहले वे भुजा तुल्य मानीं थीं जो तुल्य कोनों का स्पर्श करती हैं अर्थात् उन के बीच में हैं अब उन भुजों को तुल्य मानते हैं जो तुल्य कोनों के साम्हने हैं अर्थात् कोने तो वे ही हैं और भुजों में (अ इ) और (क ग) को तुल्य माना है तो शेष भुजा भी तुल्य होंगी अर्थात् (अ उ) और (क च) तथा (इ उ) और (ग च) भुजा समान होंगी और (इ अ उ) कोन (ग क च) कोन के तुल्य होगा ॥

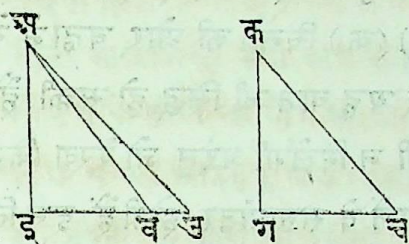
॥ उपपत्ति ॥

(इ उ) और (ग च) समान न हों तो (इ उ) को (ग च) से बड़ा मानो और (इ उ) में से (ग च) के तुल्य (इ व) करके (अ व) रेखा करदो॥

सा ३

(अ इ व) और (क ग च) त्रिभुजों में (इ व) और (ग च) भुजा और (अ इ) और (क ग) भुजा तुल्य हैं और (अ इ व) कोन भी (क ग च) कोन के तुल्य है इस लिये (अ व) और (क च) आधार और (अ इ व) और त्रिभुज (क ग च) त्रिभुज भी आपस में तुल्य होंगे इसी से शेष कोन शेष कोनों के तुल्य होंगे इस कारण (इ व अ) कोन (ग च क) कोन के तुल्य है परंतु (ग च क) कोन (इ उ अ) कोन के तुल्य है इस कारण (इ व अ) और (इ उ अ) कोन तुल्य होंगे अर्थात् त्रिकोण का बहिः कोन सन्मुख के अंतः कोण के समान हुआ जाता है पर यह बात असंभव है इस लिये (इ उ) और (ग च) अतुल्य

क्र
सा ४
क
सा १६

नहीं किंतु तुल्य ही हैं अब (अ इ उ) और (क ग च) त्रिभुजों में (अ इ) और (क ग) तथा (इ उ) और (ग च) भी समान हैं इस

सा ४

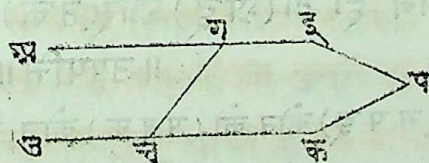
कारण (अ उ) और (क च) आधार तथा (इ अ उ) और (ग क च) कोन भी समान हैं ॥

॥ २७ साध्य ॥

दो सूधी रेखाओं पर तीसरी सूधी रेखा के गिरने से एकांतर कोन समान उत्पन्न हों तो वे दो रेखा आपस में समानांतर होंगी ॥

(अ इ) और (उ क) दो सूधी रेखा हैं उन पर (ग च) सूधी रेखा के गिरने से (अ ग च) और (ग च क) एकांतर कोन तुल्य हों तो वे (अ इ) और (उ क) रेखा समानांतर होंगी ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ) और (उ क) रेखा समानांतर न होंगी तो (इ) (क) वा (अ) (उ) की ओर बढ़ाने से मिल जायंगी कल्पना करो कि (इ) और (क) की ओर बढ़ाने से वे (प) चिन्ह पर मिलती हैं तो (प ग च) एक त्रिभुज

उत्पन्न होगा उस का (अ ग च) वहिः कोन (ग च क) अंतःकोन से बड़ा होगा परंतु यह बात असंभव है क्योंकि (अ ग च) और (ग च क) सा १६

कोन तुल्य दिये ऊए हैं इस कारण (अ इ) और (उ क) रेखा (इ) (क) चिन्हों की ओर बढ़ाने से कधी न मिलेंगी इसी प्रकार यह बात भी सिद्ध हो सक्ती है कि (अ उ) की ओर बढ़ाने से भी न मिलेंगी परंतु जो रेखा कितनी ही बढ़ाने से किसी ओर भी न मिलें वे समानांतर होती हैं इस लिये (अ इ) और (उ क) रेखा समानांतर हैं ॥

॥ २८ साध्य ॥

दो सूधी रेखाओं पर तीसरी सूधी रेखा गिरे और उसकी एक ओर का बहिः कोन उसी ओर के सन्मुख वाले अंतः कोन के समान हो वा एक ओर के दो अंतः कोन मिलकर दो सम कोन के तुल्य हों तो वे दो रेखा समानांतर होंगी ॥

(अ इ) और (उ क) दो सूधी रेखाओं पर (ग च) तीसरी सूधी रेखा के गिरने से वे रेखा जहां कटें वहां (प) और (ब) चिन्ह जानो ॥

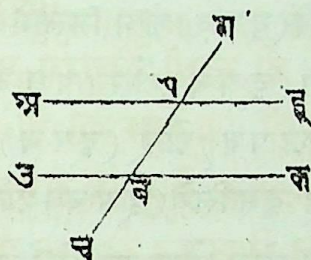
अब (ग प इ) बहिः कोन उसी ओर के (प ब क) सन्मुख और अंतः कोन के समान हो वा (इ प ब) और (प ब क) दो अंतः कोनों का योग दो सम कोन के समान हो तो (अ इ) और (उ क) रेखा समानांतर होंगी ॥

॥ उपपत्ति ॥

(ग प इ) कोन को (प ब क) कोन के समान कहा है पर (ग प इ)
सा १५ कोन (अ प ब) कोन के तुल्य हैं इस लिये (अ प ब) कोन भी (प ब क)
स १ कोन के समान ऊआ पर (अ प ब) और (प ब क) एकांतर कोन हैं
सा २७ इस लिये (अ इ) और (उ क) रेखा समानांतर हैं ॥

॥ अथवा ॥

(इ प ब) और (प ब क) कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य हो तो (अ प ब) और (इ प ब) इन दो कोनों का योग भी दो सम कोन के तुल्य होगा इस लिये (अ प ब) और (इ प ब) कोनों का योग (इ प ब) और (प ब क) कोनों के योग के तुल्य हुआ इन दोनों योगों में से (इ प ब) कोन निकाल डालें तो (अ प ब) और (प ब क) शेष कोने तुल्य ही रहेंगे परंतु वे एकांतर कोन हैं इस लिये (अ इ) और (उ क) रेखा समानांतर होगी ॥

ग
अ — प — इ
उ — ब — क
च

सा २७

॥ २८ साध्य ॥

दो सूधी समानांतर रेखाओं पर तीसरी सूधी रेखा गिरेगी तो एकांतर कोन तुल्य होंगे और उस तीसरी रेखा का एक ओर का बहिः कोन उसी ओर वाले सन्मुख अंतः कोन के समान और एक ओर के दो अंतः कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य होगा ॥

(अ इ) और (उ क) दो समानांतर रेखाओं पर (ग च) तीसरी सूधी रेखा के गिरने से जहां वे दोनों कटें वहां (प) और (ब) चिन्ह जानो ॥

तो (अ प ब) और (प ब क) एकांतर कोन तुल्य होंगे (ग प इ) बहिः कोन उसी ओर वाले साम्हने के (प ब क) अंतः कोन के तुल्य होगा तथा (इ प ब)

ग्रौर (प ब क) दो ग्रंत: कोनों का योग भी दो सम कोन के तुल्य होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

(ग्र प ब) ग्रौर (प ब क) कोनों को तुल्य न मानों तो एक दूसरे से बड़ा होगा ॥

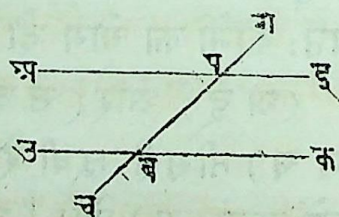
कल्पना करो कि (ग्र प ब) कोन (प ब क) से बड़ा है तो उन दोनों में (इ प ब) कोन मिलाने से (ग्र प ब) ग्रौर (इ प ब) कोनों का योग (इ प ब) ग्रौर (प ब क) कोनों के योग से बड़ा होगा परंतु (ग्र प ब) ग्रौर (इ प ब) कोनों का योग दो सम कोन के समान है इस लिये (इ प ब) ग्रौर (प ब क) कोनों का योग दो सम कोन से छोटा होगा पर दो रेखाग्रों पै तीसरी रेखा के गिरने से उस के एक ग्रोर के दो ग्रंत: कोनों का योग दो सम कोन से छोटा हो तो वे रेखा उधर की ग्रोर बढ़ाने से मिल जायंगी पर यह ग्रसंभव है क्योंकि उन को समानांतर कल्पना किया है इस लिये (ग्र इ) ग्रौर (उ क) वढ़ाने से कधी न मिलेंगी इस हेतु से जाना जाता है कि (ग्र प ब) ग्रौर (प ब क) कोने ग्रतुल्य नहीं किंतु तुल्य ही हैं परंतु (ग्र प ब) कोन (ग प इ) कोन के तुल्य है इस लिये (ग प इ) ग्रौर (प ब क) कोन भी समानहैं इन दोनों में (इ प ब) कोन जोड़ें तो (ग प इ) ग्रौर (इ प ब) कोनों का योग (इ प ब) ग्रौर (प ब क) कोनों के योग के तुल्य होगा परंतु (ग प इ) ग्रौर (इ प ब) कोनों का योग दो सम कोन के समान है इस लिये (इ प ब) ग्रौर (प ब क) कोनों का योग भी दो सम कोन के समान होगा॥

ख

ख

सा २५

ख १

ग, ग्र, प, इ, उ, ब, क, च

॥ ३० साध्य ॥

जो सूधी रेखा एक और किसी रेखा की समानांतर हैं वे आपस में भी समानांतर होंगी ॥

कल्पना करो कि (अ इ) और (उ क) में से प्रत्येक रेखा (ग च) रेखा की समानांतर है तो (अ इ) और (उ क) रेखा भी आपस में समानांतर होंगी (अ इ) (ग च) और (उ क) तीनों रेखाओं को (प ब म) सूधी रेखा काटती ऊई मान लो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(प ब म) रेखा (अ इ) और (ग च) समानांतर रेखाओं को काटती है इस लिये (अ प ब) और (प ब च) कोन तुल्य हैं ऐसे ही (प म) रेखा (ग च) और (उ क) समानांतर रेखाओं को काटती है इस लिये (प ब च) बहिःकोन (प म क) अंतः कोन के समान है परंतु (अ प म) कोन (प ब च) कोन के समान है इस लिये (अ प म) और (प म क) कोन भी तुल्य ऊए पर वे एकांतर कोन हैं इस लिये (अ इ) और (उ क) रेखा भी समानांतर हैं ॥

सा २९

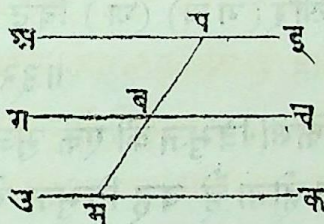
सा २९

स्व १

अ — प — इ
ग — ब — च
उ — म — क

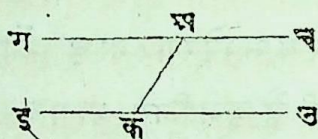
॥ ३१ साध्य ॥

दी ऊई रेखा की समानांतर एक ऐसी रेखा किया चाहते हैं जो दिये ऊए विंदु पर होके जाय ॥

कल्पना करो कि (अ) विंदु और (इ उ) रेखा दी ऊई है अब (अ च) एक ऐसी सूधी रेखा खींचो जो

(अ) पर होकर जावे और (इ उ) की समानांतर भी हो- वे (इ उ) रेखा में एक (क) बिंदु ले के वहां से (क अ) रेखा कर दो फिर (क अ) रेखा के (अ) बिंदु पर (क अ ग) एक ऐसी कोन कि (अ क उ) कोन के समान हो बना कर (ग अ) रेखा को (च) तक बढ़ा दो तो (ग च) रेखा (इ उ) रेखा की समानांतर होगी ॥

अ१ सा२३

॥ उपपत्ति ॥

(इ उ) और (ग च) रेखाओं के (क) और (अ) बिंदुओं पै (अ क) रेखा के योग से (ग अ क) और (अ क उ) एकांतर कोन तुल्य बनते हैं इस लिये (ग च) और (उ क) रेखा समानांतर हैं और (ग च) (अ) बिंदु पर हो कर जाती है ॥

क सा२७

॥ ३२ साध्य ॥

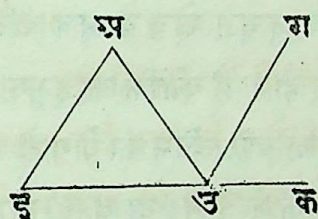
किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाने से जो बहिः कोन उत्पन्न होता है वह त्रिभुज के अपने सामने वाले दोनों अंतः कोनों के योग के समान और त्रिभुज के तीनों अंतः कोनों का योग दो सम कोन के समान होता है ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज की (इ उ) भुजा को (क) चिन्ह तक बढ़ाने से (अ उ क) कोन उत्पन्न होता है तो वह सन्मुख के दो अंतः कोन अर्थात् (उ अ इ) और (अ इ उ) के योग के तुल्य होगा, और तीन अंतः कोन अर्थात् (अ इ उ) (अ उ इ) और (उ अ इ) का योग दो सम कोन के तुल्य होगा॥

(अ इ) के समानांतर (उ ग) रेखा कर लो ॥

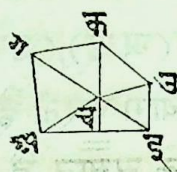
॥ उपपत्ति ॥

(अ इ), (उ ग) रेखा समानांतर हैं और (अ उ) उन दोनों से योग करती है इस लिये (इ अ उ) कोन (अ उ ग) एकांतरकोन के समान है ॥ सा २६

ऐसे ही (अ इ) (उ ग) तो समानांतर ही हैं और (इ क) उन दोनों से योग करती हैं इस लिये (ग उ क) बहिःकोन सन्मुखके (अ इ उ) अंतः कोन के समान है और ऊपर सिद्ध कर चुके हैं कि (अ उ ग) कोन (इ अ उ) कोन के समान है इस लिये (अ उ क) बहिः कोन सन्मुख के दो अंतः कोन (इ अ उ) और (अ इ उ) के योग के समान है, अब इन दोनो कोनों के योग म, और उस योग के तुल्य (अ उ क) बहिः कोन में भी (अ उ इ) कोन जोड़ दो तो (अ उ क) और (अ उ इ) कोनों का योग, तीनों कोनों के अर्थात् (इ अ उ) (अ इ उ) और (अ उ इ) के योग के समान होगा परंतु (अ उ क) और (अ उ इ) का योग दो सम कोन के समान है इसी कारण (इ अ उ) (अ इ उ) (अ उ इ) इन तीनों कोनों का योग भी दो सम कोन के तुल्य होगा ॥ सा २९ सा १३

॥ १ अनुमान ॥

ऋजुभुज क्षेत्र के सब अंतः कोनों का योग चार सम कोन मिलने से उस क्षेत्र की दूनी भुज संख्या के तुल्य होता है ॥

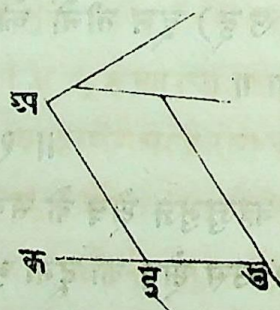
यथा (अ इ उ क ग) एक ऋजुभुज क्षेत्र है इस के भीतर कोई

च बिंदु कल्पना कर के वहां से प्रत्येक कोन तक रेखा करने से उस क्षेत्र में भुजों की संख्या के समान त्रिभुज बनजांयगे अर्थात् उस के उतने खंड होजांयगे पर ३२ वें साध्य के अनुसार प्रत्येक त्रिभुज के सब कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य होता है ॥

इस कारण उन सब त्रिभुजों के कोनों का योग द्विगुणित त्रिभुज संख्या अर्थात् भुजों की दूनी संख्या के समान सम कोनों के तुल्य होगा परंतु उन त्रिभुजों के सब कोने उस ऋजुभुज क्षेत्र के सब कोन और (च) चिन्ह पर के सब कोनों के योग के तुल्य हैं और (च) चिन्ह पर के सब कोन चार सम कोन के तुल्य हैं इसी कारण क्षेत्र के सब कोन चार सम कोन जोड़ने से उतने सम कोनों के तुल्य होंगे जितनी कि भुजों की दूनी संख्या होती है ॥

॥ २ अनुमान ॥

ऋजुभुज क्षेत्र के सब बहिः कोनों का योग चार सम कोनों के तुल्य होता है क्योंकि ऋजुभुज क्षेत्र के एक अंतः कोन और उसी के आसन्न बहिः कोन का योग दो सम कोन के तुल्य होता है इस लिये आगे के क्षेत्र में (अ इ उ) अंतः कोन और (अ इ क) बहिः कोनका योग दो सम कोन के तुल्य है इसी से सब अंतः कोन और बहिः कोनों का योग ऋजुभुज क्षेत्र के दूने सब कोन अर्थात् भुजों की दूनी संख्या के समान सम कोनों के तुल्य अर्थात् सब अंतः कोन और चार सम कोनों के योग के तुल्य होगा अब उभय निष्ठ अंतः कोनों का योग

सा १३

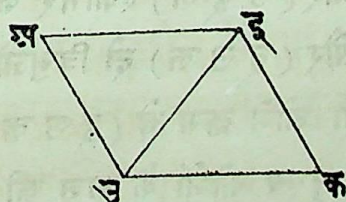
सा ३२ अनु० २

उन दोनों योगों में से निकाल डालो तो शेष सब बहि: कोनों का योग, केवल चार सम कोन के तुल्य रहैगा ॥ स्व २

॥ ३३ साध्य ॥

दो समानांतर तुल्य रेखाओं के एक २ ओर के छोर दूसरी दो सूधी रेखा घेरती हों तो वे दोनों सूधी रेखा भी आपस में तुल्य और समानांतर होंगी ॥

कल्पना करो कि (अ इ) और (उ क) दो रेखा तुल्य और समानांतर हैं और (अ उ) और (इ क) दो सूधी रेखा ऐसी हैं कि उन रेखाओं के एक एक ओर के छोरों को बांधती हैं तो ये (अ उ) और (इ क) रेखा भी आपस में तुल्य और समानांतर होंगी पहले (इ उ) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ) और (उ क) समानांतर रेखाओं से (इ उ) रेखा योग करती है इस कारण (अ इ उ) और (क उ इ) एकांतर कोन तुल्य हैं अब (अ इ उ) और (क उ इ) त्रिभुजों में (अ इ) और (उ क) तो समान हैं (इ उ) उभय निष्ठ है और (अ इ उ) (क उ इ) कोन भी तुल्य हैं इस लिये (अ उ) और (इ क) आधार तुल्य होंगे, (अ इ उ) त्रिभुज (क उ इ) त्रिभुज के तुल्य होगा और उनके शेष कोने भी समान होंगे इस कारण (अ उ इ) और (क इ उ) कोन भी तुल्य हुए पर वे (इ क) और (अ उ) रेखाओं पर (इ उ) रेखा के योग से बनते हैं और एकांतर कोन हैं इस लिये (अ उ) और (इ क) रेखा समानांतर होंगी और उनकी तुल्यता पहले ही साध चुके हैं ॥ सा २९ क सा ४

॥ ३४ साध्य ॥

समानांतर चतुर्भुज के सन्मुख के कोन आपसमें तुल्य होते और कर्ण उस के तुल्य दो बिभाग करता है ॥

समानांतर चतुर्भुज उसे कहते हैं जिस में साम्हने के भुज समानांतर हों और एक कोने से सन्मुख के कोने तक जो रेखा होती है उसे कर्ण कहते हैं ॥

कल्पना करो कि (अ उ क इ) समानांतर चतुर्भुज और उस में (इ उ) कर्ण है तो उसके सन्मुख के (अ इ) भुज (उ क) के और (अ उ) (इ क) के समान होगा ॥

तथा (इ अ उ) कोन साम्हने के इ क उ कोन के और (अ इ क) (अ उ क) के समान होगा और (इ उ) कर्ण डालने से (अ उ इ) और (क उ इ) खंड भी तुल्य होंगे ॥

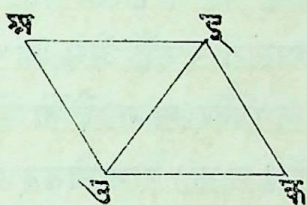
॥ उपपत्ति ॥

(इ उ) रेखा (अ इ) और (उ क) समानांतर रेखाओं से योग करती है इस लिये (अ इ उ) कोन (इ उ क) एकांतर कोन के समान होगा और वही रेखा (अ उ) और (इ क) समानांतर रेखाओं से भी योग करती है इस कारण (अ उ इ) और (उ इ क) एकांतर कोन भी तुल्य होंगे अब (अ इ उ) और (इ उ क) दो त्रिभुजों में (अ इ उ) और (अ उ इ) दो कोने क्रम से (इ उ क) और (उ इ क) के तुल्य हैं और तुल्य कोनों के पास की (इ उ) भुजा उभयनिष्ट है इस

सा २९

सा २९

कारण (इ अ उ) तीसरा कोन (इ क उ) तीसरे कोने के तुल्य होगा (अ इ) भुज (उ क) भुज के तुल्य होगा और (अ उ) भुज (इ क) भुज के समान होगा अब क्योंकि (अ इ उ) (इ उ क) कोन के और (उ इ क) (अ उ इ) कोन के तुल्य है इस लिये संपूर्ण (अ इ क) और (अ उ क) कोने भी तुल्य होंगे॥ सा २६ स्व २

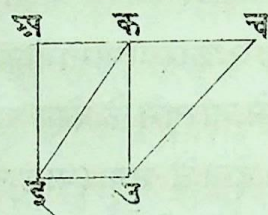
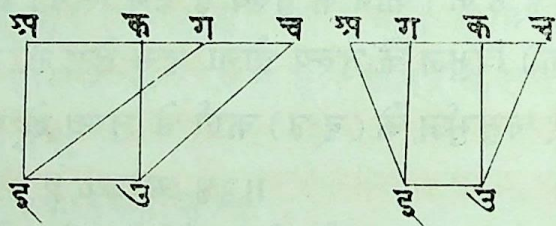
(इ अ उ) और (इ क उ) कोनों को पहले ही तुल्य साध चुके हैं इस कारण समानांतर चतुर्भुज में साम्हने के कोन और भुज तुल्य होते हैं तथा (अ इ उ) और (इ उ क) त्रिभुजों में (अ इ) और (उ क) भुजा तुल्य हैं (इ उ) उभय निष्ट है और (अ इ उ) कोन (इ उ क) कोन के तुल्य है इस लिये (अ इ उ) त्रिभुज (इ उ क) त्रिभुज के तुल्य होगा इस हेतु से (अ उ क इ) समानांतर चतुर्भुज के (इ उ) कर्ण से तुल्य दो खंड होते हैं॥

॥३५ साध्य॥

समानांतर दो रेखाओं के बीच में एक आधार पै जितने समानांतर चतुर्भुज होंगे वे सब आपस में तुल्य होंगे॥

कल्पना करो कि (इ उ) और (अ च) समानांतर रेखाओं के बीच (इ उ) आधार पै (अ इ उ क) और (क इ उ च) दो समानांतर चतुर्भुज हैं तो (अ इ उ क) (क इ उ च) समानांतर चतुर्भुज तुल्य होंगे॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ क) और (क इ उ च) ये दोनों समानांतर चतुर्भुज हैं इसी से उन में से प्रत्येक चतुर्भुज (इ क उ) त्रिभुज का दूना है इस कारण (अ इ उ क) और (क इ उ च) दोनों समानांतर चतुर्भुज तुल्य हैं यहां (अ क) और (क च) भुजों का योग एक ही (क) चिन्ह पर होता है और कदाचित् एक चिन्ह पर न हो अर्थात् वे रेखा अलग २ रहैं जैसे कि आगे (अ क) और (च ग) हैं तो क्योंकि ॥

सा ३४ स ६

(अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज है इस कारण अक और (इ उ) भुज समान हैं तथा (ग इ उ च) भी समानांतर चतुर्भुज है इस कारण (ग च) भी (इ उ) के तुल्य है इसी हेतु से (अ क) (ग च) के तुल्य है अब इन प्रत्येक में (क ग) जोड़ दिया (क्षेत्र २) तो (अ ग) और (क च) तुल्य हुए

सा ३४ स १ स २

अथवा (तीसरे स्वरूप में) तुल्य (अ क) और (ग च) में से तुल्य ही (क ग) घटा दिया तो शेष (अ ग) और (क च) तुल्य बचे अब (ग अ इ) और (च क उ) त्रिभुजों में (अ ग) भुज (क च) के (अ इ) (क उ) के और (च क उ) बहिः कोन (ग अ इ) अंतः कोन के समान है इस लिये (ग इ) आधार (च उ) आधार के और (ग इ उ) त्रिभुज (च क उ) त्रिभुज के समान है ॥

स ३ सा ३४ सा २९

अब (अइउच) संपूर्ण सम लंब चतुर्भुज में से क्रम से (चकउ) त्रिभुज और फिर (गअइ) त्रिभुज शोध डाला सो शेष समान ही रहेंगे अर्थात् वे शेष (अइउक) और (गइउच) समानांतर चतुर्भुज हैं इसी से वे तुल्य हैं ॥ स्व ३

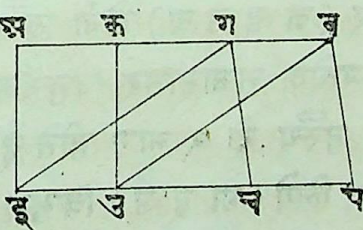
॥ ३६ साध्य ॥

दो समानांतर रेखाओं के बीच में तुल्य आधारों पै जितने समानांतर चतुर्भुज होंगे वे सब आपस में तुल्य होंगे॥

कल्पना करो कि (अइउक) और (गचपब) समानांतर चतुर्भुज (इउ) (चप) समान आधारों पै और (अब) (इप) समानांतर रेखाओं के बीच में हैं तो (अइउक) और (गचपब) समानांतर चतुर्भुज तुल्य होंगे ॥

(इग) (उब) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(इउ) और (चप) आधार तुल्य हैं पर (चप) और (गब) भी तुल्य हैं इस लिये (इउ) और (गब) भी समान हैं पर ये समानांतर रेखा हैं और इन की एक एक ओर (इग) और (उब) रेखा लगी हुई हैं इस से वे भी तुल्य और समानांतर हैं इस लिये (गइउब) समानांतर चतुर्भुज है (अब) और (इप) समानांतर रेखाओं के बीच में (इउ) आधार पै (अइउक) और (गइउब) दो समानांतर चतुर्भुज हैं इस कारण वे तुल्य होंगे ॥ सा ३५

क
स्व १
(४

इसी प्रकार (ग इ उ ब) और (ग च प ब) समानांतर चतु-
र्भुज तुल्य होंगे इस कारण (ख इ उ क) और (ग च प ब)
स१ दोनों समानांतर चतुर्भुज भी तुल्य होंगे ॥

॥ ३७ साध्य ॥

समानांतर रेखाओं के बीच में एक आधार पे जित-
ने त्रिभुज होंगे वे सब तुल्य होंगे ॥

कल्पना करो कि (ख इ उ) और (क इ उ) दो त्रिभु-
ज (इ उ) और (ख क) समानांतर रेखाओं के बीच
(इ उ) एक ही आधार पे हैं तो (ख इ उ) और (क
इ उ) दोनों त्रिभुज तुल्य होंगे ॥

(ख क) रेखा को दोनों ओर बढ़ा कर (उ ख)
के समानांतर (इ) से (इ ग) और (इ क) के स-
सा३१ मानांतर (उ) से (उ च) रेखा कर लो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(ग इ उ ख) और (क इ उ च) ये दोनों समानांतर च-
सा ३४ पोर० तुर्भुज हैं और (ग च) समानांतर रेखाओं के बीच में
(इ उ) एक ही आधार पे भी हैं इस लिये (ग इ उ ख)
सा ३५ और (क इ उ च) दोनों तुल्य हैं परंतु कर्णों से इन में
से प्रत्येक समानांतर चतुर्भुज
सा ३४ के तुल्य दो २ भाग होते हैं
इस लिये (ख इ उ) त्रिभुज
(ग इ उ ख) समानांतर च-
तुर्भुज का आधा और (क उ इ)
त्रिभुज (क इ उ च) समानांतर चतुर्भुज का आधा है परंतु (ग इ उ ख)

और (क इ उ च) समानांतर चतुर्भुज तुल्य हैं इस लिये उन के आधे (अ इ उ) और (क इ उ) त्रिभुज भी तुल्य हैं॥

॥ ३८ साध्य ॥

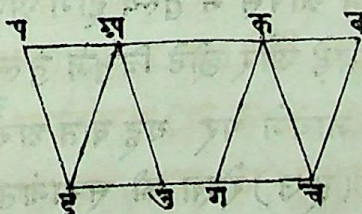
दो समानांतर रेखाओं के बीच तुल्य आधारों पै जितने त्रिभुज होंगे वे सब तुल्य होंगे ॥

कल्पना करो कि (अ क) और (इ च) दो समानांतर रेखाओं के बीच (इ उ) और (ग च) तुल्य आधारों पै (अ इ उ) और (क ग च) दो त्रिभुज हैं तो वे आपस में तुल्य होंगे ॥

(अ क) रेखा को दोनों ओर बढ़ा कर (इ) चिन्ह से (अ उ) की समानांतर (इ प) रेखा और (च) चिन्ह से (ग क) की समानांतर (च ब) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(प इ उ अ) और (क ग च ब) ये दोनों समानांतर चतुर्भुज हैं और (प ब), (इ च) समानांतर रेखाओं के बीच (इ उ) (ग च) तुल्य आधारों पै भी हैं इस लिये (प इ उ अ) और (क ग च ब) समानांतर चतुर्भुज तुल्य होंगे ॥ सा ३४ प०

परंतु कर्णों से हर एक समानांतर चतुर्भुज के तुल्य दो भाग होते हैं इस कारण (अ इ उ) त्रिभुज (प इ उ अ) समानांतर चतुर्भुज का आधा और (क ग च) त्रिभुज (क ग च ब) समानांतर चतुर्भुज का आधा है इसी से वे दोनों त्रिभुज समान हैं क्योंकि सा ३४

स्व ७ तुल्य पदार्थों के आधे भी तुल्य होते हैं ॥

॥ ३९ साध्य ॥

जो त्रिभुज एक आधार पै उस की एक ही ओर हैं और आपस में तुल्य भी हैं वे समानांतर रेखाओं के बीच में होंगे ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) और (क इ उ) तुल्य दो त्रिभुज (इ उ) आधार पै उस की एक ही ओर हैं तो वे समानांतर रेखाओं के बीच में होंगे ॥

(अ क) रेखा कर दो तो वह (इ उ) रेखा की समानांतर होगी इस बात को न मानो तो (अ) बिंदु से

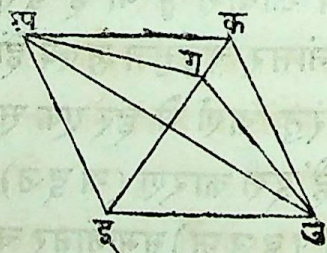
सा ३१ (इ उ) की समानांतर कोई (अ ग) रेखा कर लो और (उ ग) जोड़ दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ) और (ग इ उ) ये दो त्रिभुज (इ उ) एक ही आधार पै (अ ग) और (इ उ) समानांतर रेखाओं के बीच में हैं

सा ३७ इस कारण ये तुल्य होंगे परंतु (अ इ उ) त्रिभुज के तुल्य (क इ उ) त्रिभुज कल्पना किया है इस कारण (क इ उ) और (ग इ उ) त्रि-

स्व १ भुज आपस में तुल्य होंगे अर्थात बड़े और छोटे त्रिभुज तुल्य

स्व ६ हो जायंगे पर यह बात असंभव है इस लिये (अ ग) रेखा (इ उ) रेखा की समानांतर कधी भी नहीं होगी इसी प्रकार यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि (अ क) को छोड़ और कोई

रेखा (इ उ) की समानांतर न होगी इसी हेतु से (इ उ) की समानांतर केवल (अ क) रेखा ही होगी ॥

॥ ४० साध्य ॥

एक ही ओर के जिन तुल्य त्रिभुजों के आधार तुल्य और एक ही सूधी रेखा में होंगे

वे त्रिभुज समानांतर रेखाओं के बीच में होंगे ॥

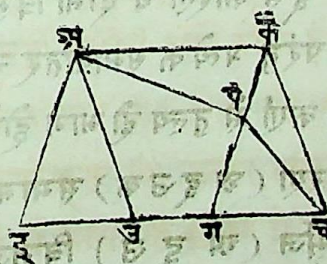
कल्पना करो कि (अ इ उ) (क ग च) दो तुल्य त्रिभुज (इ उ) और (ग च) तुल्य आधारों पै उन की एक ही ओर हैं और वे आधार (इ च) एक ही सूधी रेखा में हैं तो वे त्रिभुज समानांतर रेखाओं के बीच में होंगे ॥

(अ क) रेखा कर दो तो यह (अ क) रेखा (इ च) रेखा की समानांतर होगी कदाचित इसे समानांतर न मानो तो (इ च) की समानांतर कोई और (अ प) रेखा कर लो और (प च) जोड़ दो ॥ सा ३१.

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ) और (प ग च) दो त्रिभुज (इ उ) और (ग च) तुल्य आधारों पै तथा (इ च) और (अ प) समानांतर रेखाओं के बीच में भी हैं

इस कारण (अ इ उ) और (प ग च) दोनों त्रिभुज तुल्य होंगे परंतु (अ इ उ) त्रिभुज (क ग च) त्रिभुज के समान कल्पना किया था इस कारण सा ३८

अ क प इ उ ग च

स्व १ (प ग च) त्रिभुज (क ग च) त्रिभुज के भी समान होगा अर्था-
स्व ९ त् बड़ा त्रिभुज छोटे त्रिभुज के तुल्य होगा पर यह असंभव है इ-
स कारण (अ प) रेखा (इ च) रेखा के समानांतर नहीं हो सक्ती इ-
सी रीति से यह बात भी सिद्ध हो सक्ती है कि (इ ग) की समानां-
तर (अ क) को छोड़ और कोई भी रेखा नहीं हो सक्ती इस
लिये (अ क) और (इ च) समानांतर रेखा हैं ॥

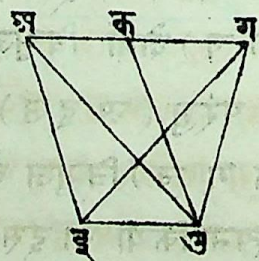
॥ ४१ साध्य ॥

समानांतर दो रेखाओं के बीच एक आधार पै एक समानांतर चतुर्भुज और एक त्रिभुज हो तो वह समानांतर चतुर्भुज उस त्रिभुज से दूना होगा ॥

कल्पना करो कि (इ उ) और (अ ग) समानांतर रेखाओं के बीच (इ उ) एक ही आधार पै (अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज और (ग इ उ) त्रिभुज है तो (ग इ उ) त्रिभुज से (अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज दूना होगा ॥

(अ उ) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ) और (ग इ उ) दोनों त्रिभुज (इ उ) एक ही आधार पै (इ उ) और (अ ग) समानांतर रेखाओं के बीच में
सा ३७ हैं इस कारण ये दोनों त्रिभुज तुल्य हैं परंतु प्रत्येक समानांतर चतुर्भुज के कर्ण से तुल्य दो भाग होते हैं इस कारण (अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज (अ इ उ) त्रिभुज का

दूना है पर (अ इ उ) और (ग इ उ) को तुल्य बना चुके हैं इस लिये (अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज (ग इ उ) त्रिभुज से भी दूना है ॥

॥ ४२ साध्य ॥

एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाया चाहते हैं जो दिये हुए त्रिभुज के तुल्य हो और जिसका एक कोना दिये हुए सरल कोन के तुल्य हो ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज और (क) कोन दिया हुआ है अब एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाना चाहते हैं जो (अ इ उ) त्रिभुज के समान हो और जिसका एक कोन (क) कोन के समान हो ॥

(इ उ) भुजा के तुल्य दो भाग (ग) चिन्ह पर करके (अ ग) रेखा कर दो फिर (ग उ) रेखा के (ग) चिन्ह पर (उ ग च) कोन (क) कोन के तुल्य बना कर (अ) चिन्ह से (अ च प) रेखा (ग उ) रेखा की समानांतर करो और (उ) चिन्ह से (उ प) रेखा ऐसी खींचो जो (ग च) की समानांतर हो इस रीति से (च ग उ प) जो समानांतर चतुर्भुज बनेगा वह (अ इ उ) त्रिभुज के तुल्य होगा ॥

सा १०

सा २३

सा ३१

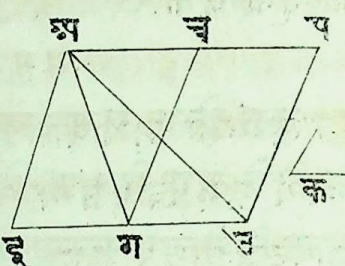
सा ३४ प०

॥ उपपत्ति ॥

(इ ग), (ग उ) तुल्य, और (इ उ) (अ प) समानांतर हैं इस लिये (अ इ ग) और (अ ग उ) त्रिभुज समान हैं इस कारण (अ इ उ) त्रिभुज (अ ग उ) त्रिभुज का दूना

के

है परंतु (अउ) एक ही आधार पै के (च ग उ प) समा-
नांतर चतुर्भुज और (अ ग उ)
त्रिभुज (इ उ) और (अ प)
समानांतर रेखाओं के बीच में हैं
इस कारण (च ग उ प) समानांतर
चतुर्भुज (अ ग उ) त्रिभुज से दू-

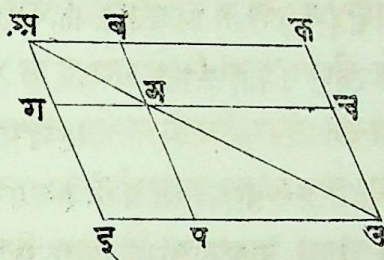
सा ४१ ना होगा इसी लिये (अ इ उ)
त्रिभुज और (च ग उ प) समानांतर चतुर्भुज समान होंगे और
उस समानांतर चतुर्भुज का (उ ग च) कोन दिये ऊए (क) कोन
के तुल्य बनाया ही है इस लिये (च ग उ प) समानांतर चतु-
र्भुज (अ इ उ) त्रिभुज के तुल्य बना है और इसका एक कोन
भी दिये ऊए (क) कोन के समान है ॥

॥ ४३ साध्य ॥

समानांतर चतुर्भुज के कर्णाश्रित दो समानांतर
चतुर्भुजों को छोड़ शेष दो चतुर्भुज आपस में तुल्य
होते हैं ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज
और उस का (अ उ) कर्ण है, (ग ब) और (प च) क-
र्णाश्रित समानांतर चतुर्भुज हैं अर्थात् इन के बीच
में हो के (अ उ) कर्ण गया है, (इ म) और (म क)
शेष चतुर्भुज हैं क्योंकि कर्णाश्रित दोनों चतुर्भुजों में
शेष चतुर्भुजों को जोड़ने से (अ इ उ क) समानांतर
चतुर्भुज संपूर्ण हो जाता है इसी लिये उन की शेष च-
तुर्भुज संज्ञा रक्खी है ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज है और (अउ) उसका कर्ण है इस कारण (अइउ) और (अकउ) दोनों त्रिभुज तुल्य होंगे ऐसे ही (अ ग म ब) समानांतर चतुर्भुज में (अ म) कर्ण से बने (अ ग म) और (अ ब म) त्रिभुज भी समान होंगे इसी प्रकार (म प उ) और (म च उ) त्रिभुज भी तुल्य होंगे अब क्योंकि (अ ग म) और (अ ब म) त्रिभुज तथा (म प उ) और (म च उ) त्रिभुज समान हैं इस लिये (अ ग म) और (म प उ) त्रिभुजों का योग (अ ब म) और (म च उ) त्रिभुजों के योग के तुल्य होगा परंतु यह बात सिद्ध कर चुके हैं कि (अ इ उ) और (अ क उ) त्रिभुज तुल्य हैं इस लिये शेष (इ म) और (म क) चतुर्भुज भी तुल्य होंगे ॥

सा ३४ सा ३४ स्व १ स्व ३

॥ ४४ साध्य ॥

दी हुई रेखा पर एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाया चाहते हैं जो एक दिये हुए त्रिभुज के समान हो और जिस का एक कोन भी दिये हुए एक कोन के तुल्य हो ॥

कल्पना करो कि (अ इ) सूधी रेखा (उ) त्रिभुज और (क) सरल कोन दिया हुआ है अब हम चाहते हैं कि (अ इ) सूधी रेखा पर ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनावें जो (उ) त्रिभुज के समान हो और जिस का एक कोन (क) कोन के तुल्य हो ॥

(उ) त्रिभुज के समान ऐसा (इ ग च प) समानांतर चतुर्भुज बनाओ कि (ग इ प) कोन (क) कोन के समान हो और (अ इ) (इ ग) दोनों रेखा एक ही रेखा में हों ॥

सा ४२
सा २३

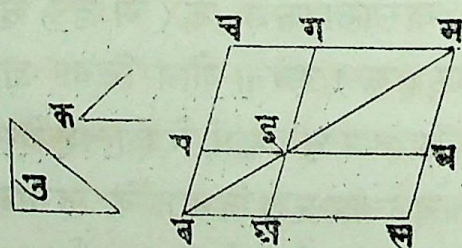
फिर (च प) को (ब) तक बढ़ा कर (अ ब) रेखा (इ प) या (ग च) के समानांतर कर लो और (ब इ) जोड़ दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(ब च) रेखा (अ ब) और (ग च) समानांतर रेखाओं से योग करती है इस कारण (अ ब च) और (ब च ग) कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य है इस कारण (इ ब च) और (ब च ग) कोनों का योग दो सम कोन से स्वल्प होगा पर एक रेखा पै दो रेखाओं का योग होने से जिधर के दो अंतःकोनों का योग दो सम कोन से छोटा होता है उधर को बढ़ाने से वे दोनों रेखा मिल जाती हैं इस कारण (ब इ) और (च ग) रेखा बढ़ाने से (म) चिन्ह पर मिलेंगी अब (म) चिन्ह से (ग अ) या (च ब) रेखा की समानांतर (म ल) रेखा खींच कर (ब अ) और (प इ) रेखाओं को अपनी २ सूध में बढ़ा कर (ल) और (न) चिन्ह पै जा मिलाओ ॥

सा २९
स्व ३

(च ब ल म) समानांतर चतुर्भुज में (ल इ) (इ च) शेष समानांतर चतुर्भुज तुल्य हैं परंतु (इ च) समानांतर चतुर्भुज (उ) त्रिभुज के तुल्य है इस कारण लइ चतुर्भुज

क

भी (उ) त्रिभुज के समान होगा तथा (प इ ग) (अ इ न) कोन तुल्य हैं परंतु (प इ ग) (क) कोन के तुल्य है इस लिये (अ इ न) कोन भी (क) कोन के तुल्य होगा अर्थात् (अ इ) रेखा पे (अ इ न ल) चतुर्भुज (अ) त्रिभुज के तुल्य बना है और उस का (अ इ न) कोन भी (क) कोन के तुल्य है ॥ स १

॥ ४५ साध्य ॥

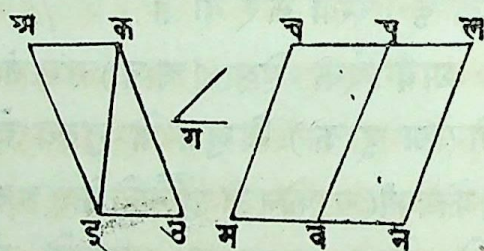
एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाना चाहते हैं जो दिये हुए एक ऋजुभुज क्षेत्र के तुल्य हो और जिस का एक कोन भी दिये हुए एक कोन के तुल्य हो ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ क) दिया हुआ क्षेत्र और (ग) दिया हुआ कोन है अब एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाया चाहते हैं जो (अ इ उ क) क्षेत्र के समान हो और जिस का एक कोन भी (ग) कोन के समान हो (क इ) रेखा कर दो ॥

अब एक ऐसा (च ब) समानांतर चतुर्भुज बनाओ जो (अ इ क) त्रिभुज के तुल्य हो और जिस का (च म ब) कोन भी (ग) कोन के तुल्य हो फिर (प ब) रेखा पर (प न) एक और ऐसा चतुर्भुज बनाओ जो (क इ उ) त्रिभुज के तुल्य हो और जिस का (प ब न) कोन (ग) कोन के समान हो तो (च म न ल) इष्ट समानांतर चतुर्भुज होगा ॥ सा ४२ सा ४४

॥ उपपत्ति ॥

(ग) कोन, (च म न) और (प ब न) प्रत्येक कोन के समान है इस लिये (च म न) और (प ब न) कोन भी समान होंगे इन दोनों स्व स १

में (प ब म) कोन जोड़ने से (च म ब) (म ब प) कोनों का योग,(प
स्व २ ब न) (म ब प) कोनों के योग के तुल्य होगा परंतु (च म ब)
और (म ब प) कोनों का योग दो समकोन के तुल्य है इस लिये
स्व १ (प ब न) और (म ब प) कोनों का योग भी दो सम कोन के तुल्य
होगा अब क्योंकि (ब प) रेखा के (ब) चिन्ह पर (ब म) और
(ब न) दो सूधी रेखाओं के मिलने से दो आसन्न कोन दो समको
न के तुल्य उत्पन्न होते हैं इस लिये (ब म) और (ब न) एक ही सू
धी रेखा में होंगी तथा (ब प) रेखा,(म न) और (च प) समानांतर
रेखाओं से योग करती है इस लिये (न ब प) और (ब प च) ए-
सा २९ कांतर कोने तुल्य हैं इन दोनों में (ब प ल) कोन जोड़ने से (न ब
प) और (ब प ल) कोनों का योग (ब प च) और (ब प ल) कोनोंके
स्व २ योग के तुल्य होगा परंतु (न ब प) और (ब प ल) कोनों का योग
सा २९ दो सम कोन के तुल्य है इस कारण (ब प च) और (ब प ल) को
नों का योग भी दो सम
स्व १ कोन के तुल्य होगा इस
कारण से (च प) और
(प ल) रेखा भी एक
ही सूधी रेखा में होंगी॥

सा ३० अब क्योंकि (म च) रेखा जो (ब प) रेखा की समानांतर और
(ब प) रेखा (न ल) रेखा की समानांतर है इस लिये (म च)
और (न ल) रेखा भी समानांतर होंगी और (म न) रेखा (चल)
सा ३४ प० रेखा की समानांतर अभी सिद्ध की है इस लिये (म च ल न)
समानांतर चतुर्भुज है॥

परंतु (अ क इ) त्रिभुज (च ब) समानांतर चतुर्भुज के और

(क इ उ) त्रिभुज (प न) समानांतर चतुर्भुज के समान है इस कारण (अ इ उ क) संपूर्ण क्षेत्र (म च ल न) संपूर्ण समानांतर चतुर्भुज क्षेत्र के तुल्य है ॥

इस लिये (म च ल न) समानांतर चतुर्भुज दिये हुए (अ इ उ क) क्षेत्र के तुल्य बनाया गया है और उस का (च म न) कोन (ग) कोन के तुल्य है ॥

॥ अनुमान ॥

४५ वें साध्य से यह बात भी स्पष्ट जानी जाती है कि कल्पित रेखा पर एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बन सक्ता है कि जो एक कल्पित ऋजुभुज क्षेत्र के तुल्य हो और जिस का एक कोन भी एक कल्पित कोन के तुल्य हो ऐसे समानांतर चतुर्भुज बनाने की यह रीति है कि ऋजुभुज क्षेत्र के कोनों के बीच में ऐसी रेखा खींचो कि उस का प्रत्येक खंड त्रिभुज हो फिर कल्पित रेखा पर एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाओ जो उस ऋजुभुज क्षेत्र के एक खंड वा एक त्रिभुज के तुल्य हो और जिस का एक कोन भी एक कल्पित कोन के तुल्य हो इसी रीति से इस कल्पित समानांतर चतुर्भुज के एक भुज पर एक और समानांतर चतुर्भुज बनाओ जो उस ऋजुभुज क्षेत्र के दूसरे खंड वा त्रिभुज के तुल्य हो और जिस का एक कोन भी उस कल्पित कोन के तुल्य हो इसी रीति से सब खंड पूरे कर लो तो इष्ट समानांतर चतुर्भुज बन जायगा ॥

॥ ४६ साध्य ॥

दी हुई सूधी रेखा पै एक वर्ग क्षेत्र बनाना चाहते हैं ॥

कल्पना करो कि (अ इ) दी हुई सूधी रेखा है उस पै एक वर्ग क्षेत्र बनाने की इच्छा है ॥

सा ११ (अ इ) रेखा के (अ) चिन्ह पै (अ उ) लंब खड़ा
सा ३ कर के उस में से (अ इ) के समान (अ क) काट लो
सा ३१ फिर (क) चिन्ह से (क ग) रेखा (अ इ) की समानांतर
और (इ) चिन्ह से (इ ग) रेखा (अ क) की समानांतर कर लो

॥ उपपत्ति ॥

सा २४ प० (अ क ग इ) एक समानांतर चतुर्भुज है जिस में (अ इ) रेखा
सा २४ (क ग) के और (अ क) (इ ग) के समान है परंतु (अ इ) भुजा
ह (अ क) भुजा के भी तुल्य है इस लिये (अ इ) (अ क) (क ग),
स्व १ (ग इ) सब भुजा आपस में तुल्य हैं इस कारण (अ क ग इ) स-
मानांतर चतुर्भुज तुल्य भुज है ॥

तथा (अ क) रेखा (अ इ) और (क ग) समानांतर रेखाओं से योग करती है इस कारण (इ अ क) और (अ क ग) कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य है परंतु उन में (इ अ क) कोन सम कोन है इस लिये (अ क ग) कोन भी सम कोन है परंतु समानांतर चतुर्भुज में सन्मुख के कोन तुल्य होते हैं इसी से (अ इ ग) और (इ ग क) कोने भी सम कोने हैं अर्थात् चारों कोने सम कोन हैं इस कारण (अ क ग इ) सम कोन चतुर्भुज है पर इस की सम भुज भी पहले साध चुके हैं इस लिये यह (अ क ग इ) वर्ग क्षेत्र है और (अ इ) रेखा पर बना भी है ॥

(हा; स्व ३; सा २४; प ३०)

उ
क ग
अ इ

॥ अनुमान ॥

इस से यह बात भी जानी जाती है कि समानांतर चतुर्भुज में एक कोन सम कोन होगा तो शेष कोन भी सम कोन होंगे ॥

॥ ४७ साध्य ॥

सम कोन त्रिभुज के सम कोन के साम्हने की भुजा का वर्ग शेष दो भुजों के वर्ग योग के तुल्य होता है॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) सम कोन त्रिभुज और उस में (इ अ उ) सम कोन है तो (इ उ) भुजा का वर्ग (अ इ) (अ उ) भुजों के वर्ग योग के तुल्य होगा ॥ ४ प्र

(इ उ) पर (इ क ग उ) वर्ग क्षेत्र तथा (अ इ) और (अ उ) पर (अ प च इ) और (अ ब म उ) वर्ग क्षेत्र बना लो (अ) से (अ ल) रेखा (इ क) वा (उ ग) की समानांतर खींच लो और (अ क) (च उ) रेखा भी कर लो ॥ सा ४६

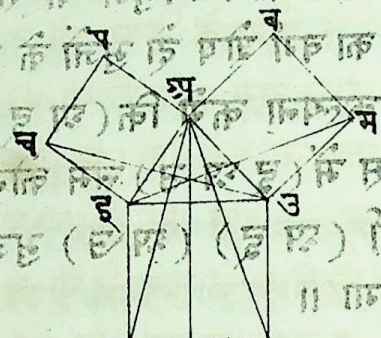
॥ उपपत्ति ॥

(इ अ उ) और (इ अ प) दोनों सम कोने हैं अर्थात् (अ) विन्दु पे (अ इ) के साथ (अ उ) और (अ प) रेखाओं के योग से उत्पन्न हुए दो आसन्न कोने दो सम कोन के तुल्य हैं इस कारण (अ उ) और (अ प) एक ही रेखा में हैं इसी हेतु से (अ इ) और (अ ब) भी एक ही रेखा में हैं अब क्योंकि (क इ उ) और (च इ अ) दोनों सम कोन हैं इस कारण ये तुल्य हैं इन दोनों में (अ इ उ) कोन मिलाने से संपूर्ण (क इ अ) कोन संपूर्ण (च इ उ) कोन के तुल्य होगा इस से (अ इ क) और (उ इ च) त्रिभुजों में (अ इ) और (च इ) तथा (इ क) और (इ उ) भुजा समान हैं और (क इ अ) कोन (च इ उ) कोन के तुल्य है इस प ३० सा ४ प ३० स्व

लिये उन के आधार (अ क) और (च उ) तुल्य होंगे अर्थात (अ इ क) त्रिभुज (च इ उ) त्रिभुज के तुल्य होगा अब क्योंकि एक ही आधार पे के (इ ल) समानांतर चतुर्भुज और (अ इ क) त्रिभुज (इ क) और (अ ल) समानांतर रेखाओं के बीच में हैं इस कारण (इ ल) समानांतर चतुर्भुज (अ इ क) त्रिभुज से दूना है तथा (इ प) वर्ग क्षेत्र और (च इ उ) त्रिभुज (च इ) एक ही आधार पे और (च इ) (प उ) समानांतर रेखाओं के बीच में हैं इस कारण (इ प) वर्ग क्षेत्र (च इ उ) त्रिभुज से दूना है परंतु (अ इ क) और (च इ उ) त्रिभुजों को तुल्य साध चुके हैं और तुल्य पदार्थों के दूने भी तुल्य ही होते हैं इस लिये (इ ल) समानांतर चतुर्भुज (इ प) वर्ग क्षेत्र के तुल्य है इसी रीति से (अ ग) और (इ म) रेखा खींचने से यह बात भी सिद्ध होती है कि (उ ल) समानांतर चतुर्भुज (उ ब) वर्ग क्षेत्र के तुल्य है इस कारण संपूर्ण (इ क ग उ) वर्ग क्षेत्र (इ प) और (उ ब) दो वर्ग क्षेत्रों के योग के तुल्य है पर (इ क ग उ) वर्ग क्षेत्र तो (इ उ) भुजा पर और (इ प) (उ ब) वर्ग क्षेत्र (अ इ) और (अ उ) भुजों पे खिंचे हुए हैं अर्थात (इ उ) पे का वर्ग क्षेत्र (अ इ) और (अ उ) पे के वर्ग क्षेत्रों के योग के तुल्य है ॥

सा ४

सा ४१

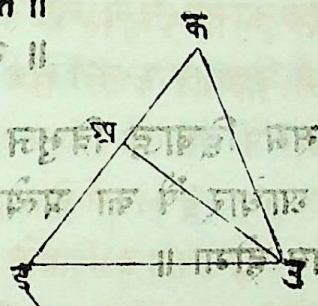
स्व ६

॥ ४८ साध्य ॥

त्रिभुज के एक भुज पै का वर्ग क्षेत्र शेष भुजों पै के वर्ग क्षेत्रों के योग के तुल्य हो तो उन शेष भुजों से बना अ-ग्रा कोन सम कोन होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज की (इ उ) भुजा पर का वर्ग क्षेत्र शेष दो (अ इ) और (अ उ) भुजों पै के वर्ग क्षेत्रों के योग के तुल्य है तो (इ अ उ) कोन सम कोन होगा ॥

(अ उ) भुजा पर (अ) से (अ क) लंब डाल कर (अ क) को (अ इ) के तुल्य बनालो और (क उ) रेखा कर दो ॥ सा २९ सा ३

॥ उपपत्ति ॥

(अ क) भुजा (अ इ) के तुल्य है इस लिये (अ क) वर्ग (अ इ) वर्ग के तुल्य होगा उन में (अ उ) वर्ग जोड़ने से (अ क) और (अ उ) भुजों का वर्ग योग (अ इ) और (अ उ) के वर्ग योग के तुल्य होगा परंतु (क अ उ) कोन सम कोन है इस लिये (क उ) का वर्ग (क अ) और (अ उ) के वर्ग योग के तुल्य है और (इ उ) का वर्ग भी (इ अ) और (अ उ) के वर्ग योग के तुल्य है इस लिये (उ क) का वर्ग (इ उ) के वर्ग के तुल्य है इस लिये (उ क) भुजा (इ उ) के तुल्य है अब (क अ उ) और (इ अ उ) त्रिभुजों में (अ क) भुजा (अ इ) के तुल्य है (अ उ) उभय निष्ठ है तथा (क उ) और (इ उ) आधार भी तुल्य हैं इस लिये (क अ उ) कोन (इ अ उ) कोन के तुल्य होगा परंतु (क अ उ) सम कोन है इसी हेतु से (इ अ उ) कोन भी सम कोन होगा ॥ स्व २ सा ४७ स्व १ सा ८

अभ्यास के लिये ऐसे प्रश्न लिखते हैं जिनका कि साधन प्रथम अध्याय के साध्यों से हो सक्ता है ॥

॥ १ प्रश्न ॥

सा ६।४

सम द्विबाहु त्रिभुज के आधार के साम्हने के शीर्ष कोण के दो तुल्य खंड करती हुई कोई रेखा आधार से आलगे तो वह आधार के भी तुल्य दो खंड करेगी और उस पै लंब भी होगी ॥

॥ २ प्रश्न ॥

सा० ३२।६

सम द्विबाहु त्रिभुज का शीर्ष कोन सम कोन हो तो आधार पै का प्रत्येक कोन आधे सम कोन के समान होगा ॥

॥ ३ प्रश्न ॥

सा० ३२।६

सम द्विबाहु त्रिभुज का शीर्ष कोन बनाने वाली रेखाओं में से किसी एक को शीर्ष कोन से आगे को बढ़ाने से जो बहिः कोन उत्पन्न होगा वह आधार पै के प्रत्येक कोन से दूना होगा ॥

॥ ४ प्रश्न ॥

सा० १३।१९ सा० ३२

दिये हुए बिंदु से दी हुई रेखा पर जितनी रेखा खींची जायगी उन में सब से छोटी रेखा लंब होगी और लंब से दूर वाली रेखा से पास वाली रेखा छोटी

होगी तथा उस बिंदु से लंब के आस पास की केवल दो ही दो रेखा तुल्य खिंच सकेंगी ॥ सा ४

॥ ५ प्रश्न ॥

एक त्रिभुज के बहिः कोन और उस के सम्हने के अंतः कोन का योग, दूसरे त्रिभुज के बहिः कोन और उस के साम्हने के अंतः कोन के योग से दूना हो तो दूसरे के शेष अतः कोन से पहले त्रिभुज का शेष अंतः कोन दूना होगा ॥ सा० ९।२९ ३२

॥ ६ प्रश्न ॥

जिन दो रेखाओं के योग से कोन उत्पन्न होता है उन की समानांतर दो और रेखाओं से जो कोन उत्पन्न होगा वह उस पहले कोन के तुल्य होगा ॥ सा ३४

॥ ७ प्रश्न ॥

त्रिभुज की दो भुजाओं का अंतर शेष तीसरी भुजा से छोटा होता है ॥ सा ३।५ १९

॥ ८ प्रश्न ॥

त्रिभज में आधार के आधे पै से शीर्ष तक खींची रेखा शेष दो भुजों के योग के आधे से भी कम होती है॥ सा० ३२।१५ ३४

॥ ९ प्रश्न ॥

शीर्ष कोन अधिक कोन हो तो आधार के आधे पै से शीर्ष तक जो रेखा खींची जायगी वह आधार के

२४ आधे से छोटी, सम कोन होगा, तो तुल्य और न्यून कोन होगा, तो बड़ी होगी ॥

॥ १० प्रश्न ॥

सा० १०।११ ४।२९ दी हुई रेखा में एक ऐसा बिन्दु निश्चित करो कि वहां से दिये हुए दो बिंदुओं तक जो रेखा खींची जांय वे तुल्य हों ॥

॥ ११ प्रश्न ॥

सा० १२।२६ ५।६ त्रिभुज के आधार वाले दोनों कोनों के तुल्य दो खंड करती हुई दो रेखा जिस बिंदु पै मिलें वहां से शीर्ष बिंदु तक जो रेखा खींची जायगी वह शीर्ष कोन के तुल्य दो खंड करेगी ॥

॥ १२ प्रश्न ॥

सा० १०।११ ५।६ २६ त्रिभुज के दो भुजों के आधों पै से खिंचे हुए लंब जिस बिंदु पै योग करें वहां से आधार पै लंब डालाजाय तो वह आधार के तुल्य दो खंड करेगा ॥

॥ १३ प्रश्न ॥

१२।३ ५।१४ दी हुई रेखा में एक ऐसा बिंदु बतलाओ कि वहां से जो दिये हुए दो बिंदुओं तक रेखा खींची जांय वे दी हुई रेखा से तुल्य हों ॥

॥ १४ प्रश्न ॥

१२।१० ४ किसी रेखा के एक लंब से तुल्य दो खंड हों तो उस लंब के किसी बिंदु से जो उस रेखा के दोनों छोरों तक दो रेखा खींची जायगी वे तुल्य होंगी ॥

॥ १५ प्रश्न ॥

दो रेखा और उन के बीच में कहीं एक बिंदु दिया हुआ है अब उस बिंदु में होकर उन दोनों रेखाओं तक एक ऐसी रेखा खींचो कि जिस के उस दिये हुए बिंदु पै तुल्य दो खंड हो जायं ॥

३।३२ २५।२७ ३४।२६ १४

॥ १६ प्रश्न ॥

त्रिभुज के शीर्ष बिंदु से आधार पै एक तो लम्ब और दूसरी एक ऐसी रेखा की जाय कि जो शीर्ष कोन के तुल्य दो खंड करे तो उस लंब और कोणार्द्ध कारिणी रेखा से जो कोन बनेगा वह आधारस्थ कोनों के अंतरार्द्ध के तुल्य होगा ॥

२१।५ ४

॥ १७ प्रश्न ॥

सम द्विबाहु त्रिभुज के आधार में कोई बिंदु लेकर वहां से जो दोनों भुजों पै लंब किये जायगे उन का योग आधार के किसी छोर से जो सन्मुख के भुज पर लंब किया जायगा उस के तुल्य होगा ॥

३१।३४ २५।२६

॥ १८ प्रश्न ॥

सम त्रिभुज के भीतर कोई बिंदु लेकर वहां से तीनों भुजों पर लंब किये जायं तो उनका योग उस त्रिभुज के किसी कोन से साम्हने की भुजा पर पड़े लंब के समान होगा ॥

३१।३४ २६।२९ १९

॥ १९ प्रश्न ॥

११।३ १०।२६ ४ — सम कोन त्रिभुज के कर्ण और एक भुज का योग तथा तीसरा भुज भी दिया हुआ है सम कोन त्रिभुज बना दो ॥

॥ २० प्रश्न ॥

२३ ९।३१ २९।६ — एक त्रिभुज के भुजों का योग और आधार पै के दोनों कोन दिये हैं वह त्रिभुज बनादो ॥

॥ २१ प्रश्न ॥

३१।२५ २९।३४ २६।३२ १४ — त्रिभुज के आधार के दोनों अग्रों से ऐसी रेखा खींची जाय, जो सन्मुख भुजों के तुल्य दो २ खंड करें तो उन रेखाओं के योग चिन्ह पै होके जो शीर्ष बिंदु से आधार पै रेखा आवेगी वह उस आधार के भी तुल्य दो खंड करेगी ॥

॥ २२ प्रश्न ॥

सा २० — एक क्षेत्र के आधार पै उस के अंतर्गत कोई ऋजुभुज क्षेत्र बनाया जाय तो उस अंतर्गत क्षेत्र के सब भुजों का योग दूसरे क्षेत्र के सब भुजों के योग से छोटा होगा ॥

॥ २३ प्रश्न ॥

३१।३७ — दिये हुए ऋजुभुज क्षेत्र के तुल्य त्रिभुज बनाओ

॥ २४ प्रश्न ॥

जो तुल्य त्रिभुज समानांतर रेखाओं के बीच में

होंगे वे तुल्य आधार पै भी होंगे ॥

रेखा गणित में जिन चिन्हों का प्रयोजन पड़ता है उन को नीचे लिखते हैं उन से यह लाभ है कि थोड़ा लिखने में बहुत सा अर्थ पाया जाता है ॥

चिन्ह ॥ चिन्ह का अर्थ ॥

\+ यह योग का चिन्ह है, जिन के बीच में यह चिन्ह होता है उस का योग जाना जाता है, जैसा अ + इ इस से यह जाना जाता है कि (अ) में (इ) को जोड़ना है ॥

− यह घटाने का चिन्ह है, दो राशों के बीच में यह चिन्ह हो तो जानो कि दाहिनी ओर की राशि को बाईं ओर की राशि में से घटाना है, जैसा अ − इ इस का अर्थ यह कि (अ) में से (इ) को घटाना है ॥

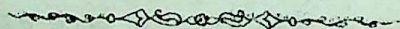
× वा · यह गुणन का चिन्ह है, जिन के बीच में यह चिन्ह देखो उन का घात जानो जैसा अ × इ वा अ · इ इन दोनों स्वरूपों से यही जाना जाता है कि (इ) को (अ) से गुणा करना है ॥

२ यह वर्ग का चिन्ह है जिस का वर्ग करना होता है उस के सिर पै दाहिनी ओर यह अंक कर देते हैं, जैसा (अ) का वर्ग लिखना हो तो अ२ ऐसा लिखेंगे और (अ) वर्ग पढ़ेंगे (अ) को रेखा मान कर उस के ऊपर जो वर्ग क्षेत्र बनेगा उस का चिन्ह अ२ यह होगा ॥

चिन्ह ॥ चिन्ह का अर्थ ॥

= यह तुल्य का चिन्ह है जिन के बीच में ऐसा चिन्ह देखो उन्हें तुल्य जानो, जैसा अ = इ इस का अर्थ यह है कि (अ) और (इ) समान हैं ॥

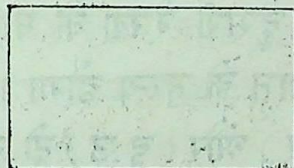
> इस चिन्ह को बड़ा है, यों पढ़ते हैं जैसा अ > क इस का अर्थ है कि अ बड़ा है (क) से वा (क) से (अ) बड़ा है॥

< इस चिन्ह को छोटा है यों पढ़ते हैं जैसा क < अ इसका अर्थ है कि (क) छोटा है (अ) से वा (अ) से (क) छोटा है ॥

॥ रेखा गणित ॥

। दूसरा अध्याय ।

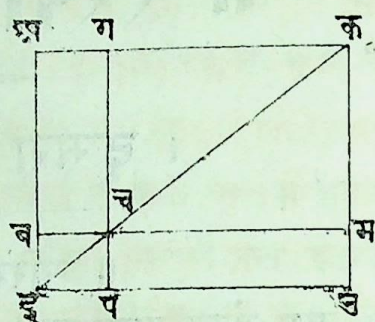
॥ परिभाषा ॥

१ सम कोन समानांतर चतुर्भुज अर्थात् जात्यायत क्षेत्र उन दो सूधी रेखाओं से बन सक्ता है जिन के अग्र योग से सम कोन उत्पन्न होता है ॥

दो सरल रेखाओं से जात्यायत क्षेत्र का बनाना लिखा उसका आशाय यह है, कि उन दो रेखाओं के घात के तुल्य उस जात्यायत का क्षेत्र फल होता है, जैसा (अ इ) और (इ उ) सरल रेखाओं से जो जात्यायत बनाया जायगा, वह (अ इ) और (इ उ) के घात के तुल्य होगा जात्यायत की पास की दो भुजा जान कर शेष दो भुजाओं का जान्ना सहज है क्योंकि दी हुई रेखाओं में से हर एक के अग्र से दूसरी रेखा की समानांतर

रेखा की जाय तो जात्यायत क्षेत्र बन जाता है तथा क्योंकि जिन अक्षरों के बीच में · ऐसा चिन्ह होता है उन का घात जाना जाता है जैसा (अ · इ) से (अ) और (इ) का घात इस लिये यह उस जात्यायत का फल होगा जिस की भुजा (अ) और (इ) है ॥

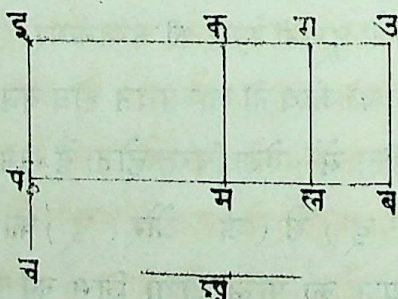
२ समानांतर चतुर्भुज में एक तो कर्ण छिन्न और

दो शेष इन तीन समानांतर चतुर्भुजों के योग को मापक कहते हैं॥

जैसा (ब प) (अ च) और (च उ) इन तीनों का योग मापक कहाता है और उसे संक्षेप से इस रीति पे बोलते हैं (अ प म) वा (ग ब उ) ये अक्षर उन समानांतर चतुर्भुजों के सन्मुख कोनों पर हैं जिन से कि मापक बनता है इसी रीति से (अ म प) भी एक मापक है॥

३ जिस चिन्ह पर रेखा काटी जाती है वह भाग बिंदु कहाता है॥

॥ १ साध्य ॥

दो दी हुई सूधी रेखाओं में से एक के कई खंड किये जांय तो उन प्रत्येक खंड और बिना बिभाग की हुई दूसरी रेखा के घातों का योग दी हुई रेखाओं के घात के तुल्य होगा॥

(अ) और (इ उ) दो सूधी रेखाओं में से कल्पना करो कि (इ उ) के भाग (क) और (ग) चिन्हों से किये हैं तो जो (अ) और (इ उ) सूधी रेखाओं से जात्यायत बनेगा वह (अ) और (इ क) (अ) और

(क ग) तथा (अ) और (ग उ) रेखाओं से जात्यायत बनेंगे उन सबों के योग के तुल्य होगा अर्थात(अ) और (इ क) का घात (अ) और (क ग) का घात तथा (अ) और (ग उ) का घात इन सबों का योग (अ) और (इ उ) के घात के तुल्य होगा यथा (इ उ) रेखा के (इ) चिन्ह से (इ च) लंब करके उस में से (अ) के तुल्य (इ प), बना लो और (प) से (प ब) रेखा (इ उ) की समानांतर बना कर (क) (ग) (उ) चिन्हों से (क म), (ग ल), (उ ब) रेखा (इ प) की समानांतर बना लो ॥

सा० १।११
सा० १।३
सा० १।३१

॥ उपपत्ति ॥

(इ ब) जात्यायत (इ म) (क ल) (ग ब) इन तीनों जात्यायतों के योग के तुल्य है परंतु वह (इ प) और (इ उ) सरल रेखाओं से बना है उन में (इ प) रेखा (अ) रेखा के समान है इस हेतु से जात्यायत (इ ब) (अ) और (इ उ) के घात के समान है ॥

क

(इ म) जात्यायत (इ प) और (इ क) रेखाओं से बना है उन में (इ प) (अ) के तुल्य है इस कारण (इ म) जात्यायत, (इ क) और (अ) के घात के तुल्य है ॥

(क ल) जात्यायत (क म) और (क ग) रेखाओं से बना है, उन में (क म) (इ प) के तुल्य है और (इ प) (अ) के तुल्य है इस कारण (क म) भी (अ) के तुल्य है इसी से (क ल) जात्यायत (अ) और (क ग) के घात के समान है इसी रीति से (ग ब) जात्यायत (अ) और (ग उ) के घात के समान है ॥

सा० १।३४

इस लिये (अ · इ उ) का घात (अ · इ क) (अ · क ग) और

(अ·गउ) इन तीनों घातों के योग के तुल्य है ॥

विद्यार्थियों के समझने के लिये इस का उदाहरण अंकों में लिखते हैं ॥

अ=४, इउ=१०,

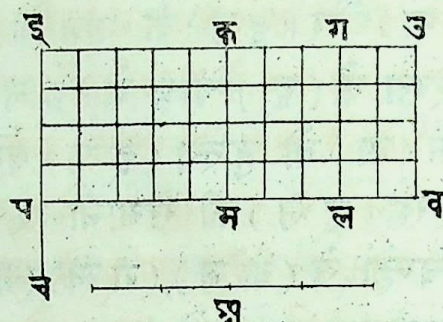
इक=५, कग=३, गउ=२

अ·इउ=४×१०=४०

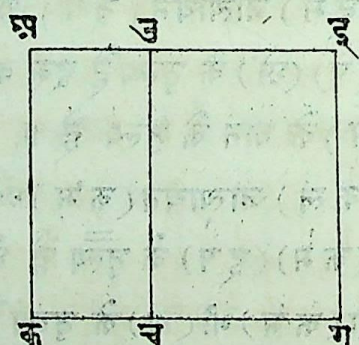
अ·इक=४×५=२०

अ·कग=४×३=१२

अ·गउ=४×२=८

४०=२०+१२+८

॥ २ साध्य ॥

एक रेखा के कैसे ही दो खंड किये जांय तो संपूर्ण रेखा और प्रत्येक खंड के घातों का योग संपूर्ण रेखा के वर्ग के तुल्य होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ) रेखा के (उ) चिन्ह पर दो खंड किये गये हैं तो (अ इ) और (अ उ) का तथा (अ इ) और (उ इ) का घात मिल के (अ इ) के वर्ग के तुल्य होगा यथा (अ इ) रेखा पर (अ क ग इ) वर्ग क्षेत्र बना कर (उ) चिन्ह से (उ च) रेखा (अ क) वा (इ ग) की समानांतर खींच लो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(ग्र ग) क्षेत्र (ग्र च) ग्रौर (उ ग) दो जात्यायतों के योग के तुल्य है परंतु (ग्र ग) क्षेत्र (ग्र इ) का वर्ग है ग्रौर (ग्र च) जात्यायत (ग्र क) ग्रौर (ग्र उ) रेखाग्रों से बना है जिन में (ग्र क) (ग्र इ) के तुल्य है इस कारण (ग्र च) जात्यायत (ग्र इ) ग्रौर (ग्र उ) के घात के तुल्य है ॥

प ३०

ऐसे ही (उ ग) जात्यायत (इ ग) ग्रौर (उ इ) रेखाग्रों से बना है जिन में से (इ ग) (ग्र इ) के तुल्य है इस कारण (उ ग) जात्यायत (उ इ) ग्रौर (ग्र इ) के घात के तुल्य है ॥

इस लिये (ग्र इ) (ग्र उ) के ग्रौर (ग्र इ) (उ इ) के दोनों घातों का योग (ग्र इ) के वर्ग के समान है ॥

॥ गणित में उदाहरण ॥

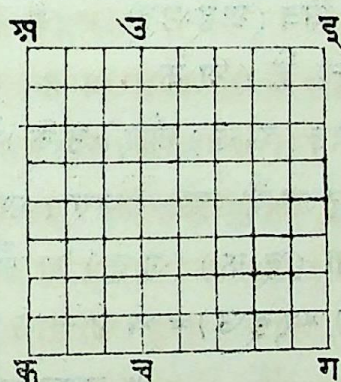
ग्र इ = ८

ग्र उ = ३, उ इ = ५

ग्र इ. ग्र उ = ८ × ३ = २४

ग्र इ. उ इ = ८ × ५ = ४०

ग्र इ^{२} = ८^{२} = ६४

२४ + ४० = ६४

॥ ३ साध्य ॥

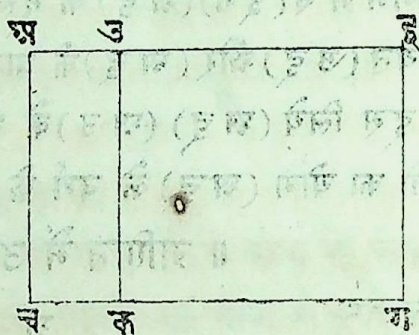
किसी रेखा के दो खंड किये जांय तो उन में से एक खंड ग्रौर संपूर्ण रेखा का घात दोनों खंडों के घात ग्रौर पूर्व खंड के वर्ग के योग के तुल्य होगा ॥

कल्पना करो कि (ग्र इ) रेखा के (उ) चिन्ह पर दो खंड

किये हैं तो (अ इ) और (उ इ) का घात (अ उ) (उ इ) के घात और (उ इ) के वर्ग के योग के तुल्य होगा॥

(इ उ) पर (उ क ग इ) वर्ग क्षेत्र बना कर (ग क) रेखा को (च) तक बढ़ा दो और (अ) चिन्ह से अच रेखा (उ क) वा (इ ग) की समानांतर खींच लो॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ ग) जात्यायत (अ क) और (उ ग) जात्यायतों के योग के समान है परंतु (अ ग) जात्यायत (अ इ) और (इ ग) रेखाओं से बना है पर (इ ग) (उ इ) के समान है इस कारण (अ ग) क्षेत्र (अइ·उइ) के तुल्य है (अ क) जात्यायत (अ उ) और (उ क) से बना है उन में (उ क) (इ उ) के तुल्य है इस कारण (अ क) क्षेत्र (अउ·उइ) के तुल्य है, तथा (इ क) (उ इ) का वर्ग है इस हेतु से

अ उ इ

च क ग

$$(अ इ) \times (इ उ) = अउ - उइ + इउ^2$$

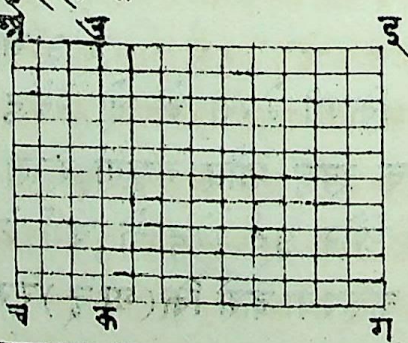
॥ उदाहरण ॥

अइ = १२ अउ = ३ उइ = ९

अइ·उइ = १२ × ९ = १०८

अउ·इउ = ३ × ९ = २७

इउ² = ९² = ८१

२७ + ८१ = १०८

॥ ४ साध्य ॥

किसी रेखा के दो खंड किये जांय तो उन दोनों खंडों के वर्ग और उन के दूने घात का योग संपूर्ण रेखा के वर्ग के तुल्य होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ) रेखा के (उ) चिन्ह पै दो खंड किये हैं तो (अ इ) का वर्ग (अ उ) वर्ग (इ उ) वर्ग और (अ उ) (इ उ) के दूने घात के योग के तुल्य होगा। यथा (अ इ) पर (अ क ग इ) वर्ग क्षेत्र बना कर (इ क) कर्ण कर दो फिर (उ) से (उ प च) रेखा (अ क) वा (इ ग) की समानांतर और (प) से (व म) रेखा (अ इ) वा (क ग) की समानांतर खींच लो ॥ सा० १।४६ सा० १।३१

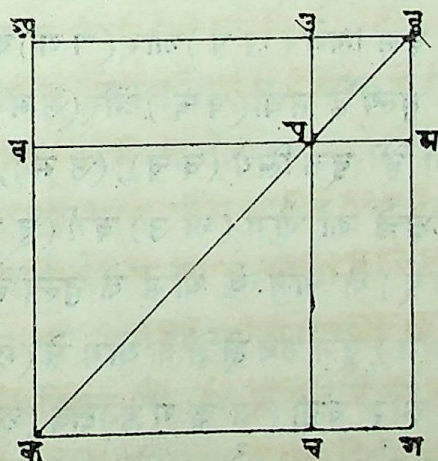
॥ उपपत्ति ॥

(इ क) रेखा (उ च) और (अ क) समानांतर रेखाओं पर गिरती है इस कारण (इ प उ) बहि: कोन (अ क इ) अंत: कोन के तुल्य है परंतु (अ क ग इ) वर्ग क्षेत्र है इस कारण (अ इ) भुजा (अ क) भुजा के और (अ क इ) कोन (अ इ क) कोन के तुल्य हैं, इस हेतु से (इ प उ) कोन भी (उ इ प) कोन के तुल्य है, इस कारण (उ इ) और (उ प) भुजा तुल्य हैं परंतु (इ उ) सा० १।२९ प० ३० स्व० १।५ स्व० १ सा० १।६

सा०
१२४
स्व०१

सा०
१२९
प०३०

सा०
१२४
प०३०

सा०
१४३

प०३०

(प म) के और (उ प) (इ म) के समान है, इस कारण (इ उ) (उ प) (प म) (म इ) चारों भुजा आपस में तुल्य हैं, अर्थात् (उ प म इ) क्षेत्र सम भुज है फिर क्योंकि (इ उ) रेखा, (उ प) और (इ म) समानांतर रेखाओं से योग करती है, इस कारण (म इ उ) औ र (प उ इ) दोनों कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य होगा, परंतु (म इ उ) सम कोन है इस लिये (प उ इ) भी सम कोन है और प्रत्येक सन्मुख के (उ प म) और (प म इ) कोन भी सम कोन हों गे, इस लिये (उ प म इ) सम कोन चतुर्भुज है और पहले इस को सम भुज भी साध चुके हैं, इस लिये यह वर्ग क्षेत्र है और (इ उ) भुजा पै स्थित है इन्हीं कारणों से (व च) भी वर्ग क्षेत्र है और (व प) भुजा पर स्थित है परंतु (व प), (अ उ) के समान है इस कारण (व च) (अ उ) का वर्ग है तथा (अ प) शेष समानांतर चतुर्भुज (प ग) शेष समानांतर चतुर्भुज के समान है उन में (अ प) (अ उ) और (उ प) का घात है परंतु (उ प) (उ इ) के तुल्य है इस कारण (अ प) जात्यायत (अउ . उ इ) के तुल्य है इसी से (प ग) जात्यायत भी (अ उ . उ इ) के तुल्य है इस लिये (अ प) और (प ग) का योग (अ उ . उ इ) के दुगुने के तुल्य है तथा (व च) और (उ म), (अ उ) और (उ इ) के वर्ग हैं इस लिये (व च), (उ म), (अ प) और (प ग) इन सब क्षेत्रों का योग (अ उ) वर्ग (इ उ) वर्ग, और दूने (अ उ) (उ इ) के घात के योग के तुल्य है परंतु (व च), (उ म), (अ म), (प ग), इन सब क्षेत्रों के योग से (अ क ग इ) संपूर्ण क्षेत्र बनता है और वही (अ क ग इ) क्षेत्र (अ इ) का वर्ग है, इस कारण (अ इ^2) = अ उ^2 + उ इ^2 + २ अ उ . उ इ ॥

॥ उदाहरण ॥

अइ = १५ अउ = १० उइ = ५

$अइ^2 = १५^2 = २२५$

$अउ^2 = १०^2 = १००$

$उइ^2 = ५^2 = २५$

२ अउ·उइ = २×१०×५ = १००

२२५ = १०० + २५ + १००

॥ अनुमान ॥

इस साधन से यह बात प्रत्यक्ष होती है कि वर्ग क्षेत्र के भीतर कर्ण छिन्न दोनों समानांतर चतुर्भुज भी वर्ग क्षेत्र होते हैं ॥

॥ ५ साध्य ॥

किसी रेखा के तुल्य और अतुल्य दो दो खंड करके अतुल्य खंडों के घात में, भाग बिंदुओं के बीच की रेखा का वर्ग जोड़ दिया जाय, तो वह योग आधी रेखा के वर्ग के तुल्य होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ) रेखा के (उ) बिन्दु पर तुल्य दो खंड और (क) पर अतुल्य दो खंड किये हैं तो (अ क) और (क इ) का घात और (उ क) का वर्ग मिलकर (उ इ) के वर्ग के तुल्य होगा ॥

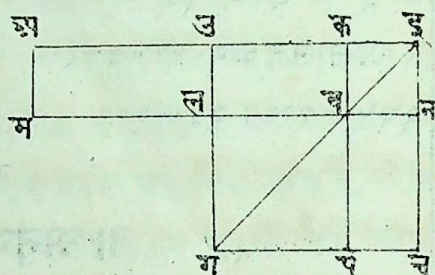
(उ इ) पर (उ ग च इ) वर्ग क्षेत्र बनाकर (इ ग) रेखा कर दो और (क) चिन्ह से (क ब प) रेखा (उ ग) वा (इ च) की समानांतर खींचकर (ब) चिन्ह पर

सा॰ १।४६

हो कर (म ल न) रेखा (उ इ) वा (ग च) की समा-
नांतर और (अ) से (अ म) रेखा (उ ल) वा इन
की समानांतर खींच लो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(उ ब) शेष समानांतर चतुर्भुज (ब च) शेष समानांतर चतुर्भुज

सा० १४३ के तुल्य है इन दोनों में (क न)
चतुर्भुज जोड़ने से संपूर्ण
स्व० २ (उ न) संपूर्ण (क च) के तुल्य
हुआ परंतु (अ उ) (उ इ)
क० के तुल्य है इस लिये (अ ल)
सा० १३६ और (उ न) भी तुल्य हैं, इसी
से (अ ल) (क च) के तुल्य हुआ इन में (उ ब) जोड़ने से, सं-
स्व० पूर्ण (अ ब), (क च) और (उ ब) के योग के समान हुआ
परंतु (अ ब), (अ क) और (क ब) से बना है जिन्हों में
सा० २४ (क ब), (क इ) के तुल्य है, इस लिये (अ ब) आत्यायत (अ क)
अ० और (क इ) के घात के तुल्य है, तथा (क च) और (उ ब)
के योग से (उ न प) मापक बनता है, इस लिये (उ न प)
स्व० १ मापक, (अ क) और (क इ) के घात के तुल्य हुआ। अब
सा० २४ इन में (ल प) अर्थात् (उ क) का वर्ग जोडा, तो (उ न प) मा-
अ० पक और (ल प) का योग (अ क) और (क इ) के घात
स्व० २ और (उ क) के वर्ग के योग के समान हुआ, परन्तु
(उ न प) और (ल प) के योग से (उ ग च इ) क्षेत्र ब-
नता है और वह (उ इ) का वर्ग है, इस कारण (अ क)
(क इ) + उक ^{2} = उइ ^{2}

॥ अनुमान ॥

इस से यह बात भी पाई जाती है कि रेखाओं का वर्गांतर उन के योग और अन्तर के घात के समान होता है ॥

॥ उदाहरण ॥

अ इ = १०, उ इ = ५, उ क = ३, क इ = २

अ क = ५ + ३ = ८

अ क · क इ = ८ × २ = १६

उ क^2 = ३^2 = ९

उ इ^2 = ५^2 = २५

२५ = १६ + ९

॥ ६ साध्य ॥

किसी दी हुई रेखा के तुल्य दो खंड करें और उसे इष्ट बिंदु तक बढ़ा दें तो बढ़ी हुई समेत संपूर्ण रेखा और बढ़े हुए भाग का घात और दी हुई आधी रेखा का वर्ग मिलकर दी हुई रेखा के आधे और बढ़े हुए भाग के योग के वर्ग के समान होंगे ॥

कल्पना करो कि (अ इ) रेखा के (उ) चिन्ह पर तुल्य दो खंड किये हैं और उस को (क) चिन्ह तक बढ़ा दिया है तो (अ क) और (क इ) का घात और (उ इ) का वर्ग मिल कर (उ क) के वर्ग के समान होगा यथा (उ क) रेखा पर (उ ग) (च क) वर्ग क्षेत्र बनाओ और (क ग) रेखा कर के (इ) चिन्ह से (इ ब प) रेखा (उ ग) वा (क च) की समानांतर तथा (ब)

सा° १४६
सा° १३१

बिंदु पै होकर (म ल न) रेखा (अ क) वा (गच) की समानांतर और (अ) बिंदु से (अ म) रेखा (उ ल) वा (क न) की समानांतर खींच लो ॥

॥ उपपत्ति ॥

क० (अ उ) और (उ इ) तुल्य हैं इस कारण (अ ल) और (उ व) जात्यायत भी तुल्य हैं परंतु (उ व) (व च) के तुल्य है इस कारण (अ ल) और (व च) भी तुल्य हैं इन दोनों में (उ न) जात्यायत जोड़ने से संपूर्ण (अ न) (उ न प) मापक के समान होगा परंतु (अ व) जात्यायत (अ क) और (क न) के अर्थात् (अ क) और (इ क) के घात के तुल्य है, इस कारण (उ न प) मापक भी (अ क) और (क इ) के घात के तुल्य है इन दोनों में (ल प) अर्थात् (उ इ) का वर्ग जोड़ने से (अ क) और (क इ) का घात और (उ इ) का वर्ग मिलकर (उ न प) और (ल प) के योग के तुल्य होगा परंतु (उ न प) और (ल प) के योग से संपूर्ण (उ ग च क) क्षेत्र बनता है और यह क्षेत्र (उ क) का वर्ग है इस कारण (अ क-क इ) + उ इ^2 = उ क^2

अ इ = १०, उ इ = ५, इ क = ३

अ क = १० + ३ = १३, उ क = ५ + ३ = ८

अ क · क इ = १३ × ३ = ३९

॥ ७ साध्य ॥

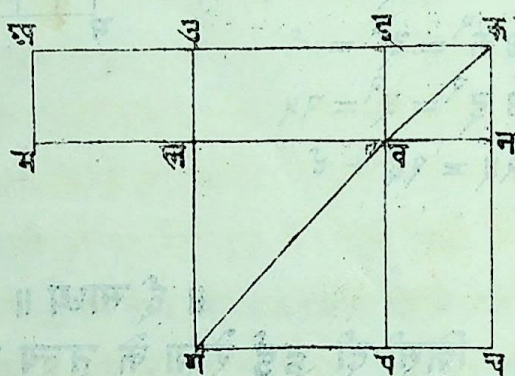
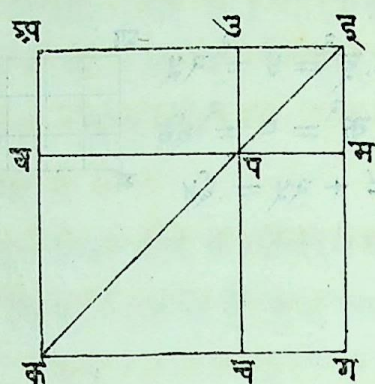
किसी रेखा के दो खंड किये जावें तो उस संपूर्ण रेखा और एक खंड का वर्ग योग, संपूर्ण रेखा और उसी खंड के दूने घात और दूसरे खंड के वर्ग के योग के समान होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ) रेखा के (उ) चिन्ह पर दो खंड किये हैं तो (अ इ) और (उ इ) के वर्गों का योग (अ इ) और (इ उ) के दूने घात और (अ उ) के वर्ग के योग के तुल्य होगा ॥

(अ इ) रेखा पर (अ क ग इ) वर्ग क्षेत्र बनाओ और जैसे पिछले साध्य में कर्ण आदि रेखा खींची हैं उसी प्रकार इस में भी खींच लो ॥

॥ उपपत्ति ॥

(अ प) और (प ग) शेष समानांतर चतुर्भुज तुल्य हैं, इनमें (उ म) जोड़ दो तो (अ म) और (उ ग) भी तुल्य होंगे इस कारण (अ म) और (उ ग) का योग दूने (अ म) के तुल्य होगा, परंतु (अ म) और (उ ग) का योग, (अ म च) मापक

सा: १।४३

और (उ म) वर्ग के योग के तुल्य है, इस लिये (अ म ब) और (उ म) का योग, भी दूने (अ म) के तुल्य होगा, परंतु दूना (अ म), (२ अ इ. इ म) वा (२ अ इ. उ इ) के तुल्य है इस लिये (अ म च) और (उ म) का योग, (अ इ. इ उ) के दूने घात के तुल्य होगा इन में (ब च) अर्थात् (अ उ) का वर्ग जोड़ने से, (अ म च)+(उ म)+(ब च), (अ इ). (इ उ) के दूने घात में जुड़े हुये (अ उ)², के तुल्य है, परंतु (अ म च) मापक (ब च) और (उ म) का योग (अ क ग इ) संपूर्ण क्षेत्र और (उ म) के योग के समान है, और यही क्षेत्र (अ इ) और (इ उ) के वर्ग हैं, इस कारण, अ इ² + इ उ² = २ अ इ. इ उ + अ उ² ॥

॥ प्रकारान्तर ॥

(अ इ) का वर्ग (अ उ) के वर्ग (उ इ) के वर्ग, और (अ उ. इ उ) के दूने घात के योग के तुल्य है इन में (इ उ) का वर्ग जोड़ने से, (अ इ) और (उ इ) के वर्गों का योग (अ उ) वर्ग, दूना (इ उ) वर्ग और (अ उ). (उ इ) के दूने घात के योग के तुल्य

सा० २।४

सा० २

रूपा अ उ इ

परंतु (इ उ) के वर्ग और (अ उ). (उ इ) घात का योग (अ इ). (इ उ) घात के तुल्य है इस कारण (इ उ) के दूने वर्ग और

सा० २।३

दूने (अउ) · (उइ) घात का योग दूने (अइ) · (इउ) घात के तुल्य हुआ इस लिये (अइ) और (उइ) का वर्ग योग दूने (अइ) · (इउ) घात और (अउ) वर्ग के योग के समान हुआ ॥

॥ अनुमान ॥

दो रेखाओं के वर्गों का योग उन रेखाओं के दूने घात और उन के अंतर वर्ग के योग के तुल्य होता है ॥

अइ = ८, अउ = ५, उइ = ३ अ

$अइ^२ = ८^२ = ६४$

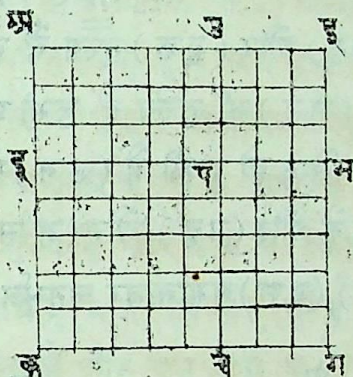
$अउ^२ = ५^२ = २५$

$उइ^२ = ३^२ = ९$

$२ अइ . इउ = २ \times ८ \times ३ = ४८$

$८^२ + ३^२ = २ \times ८ \times ३ + ५^२$

वा $६४ + ९ = ४८ + २५$

वा $७३ = ७३$

॥ ८ साध्य ॥

किसी रेखा के दो खंड किये जांय तो उस संपूर्ण रेखा और एक खंड का चौगुना घात और दूसरे खंड का वर्ग मिलकर संपूर्ण रेखा और पहले खंड के योग के वर्ग के तुल्य होंगे ॥

कल्पना करो कि (अइ) रेखा के (उ) चिन्ह पै दो खंड किये हैं तो (अइ) और (उइ) का चौगुना घात और (अउ) का वर्ग मिलकर (अइ) और (उइ) के योग के वर्ग के तुल्य होंगे ॥

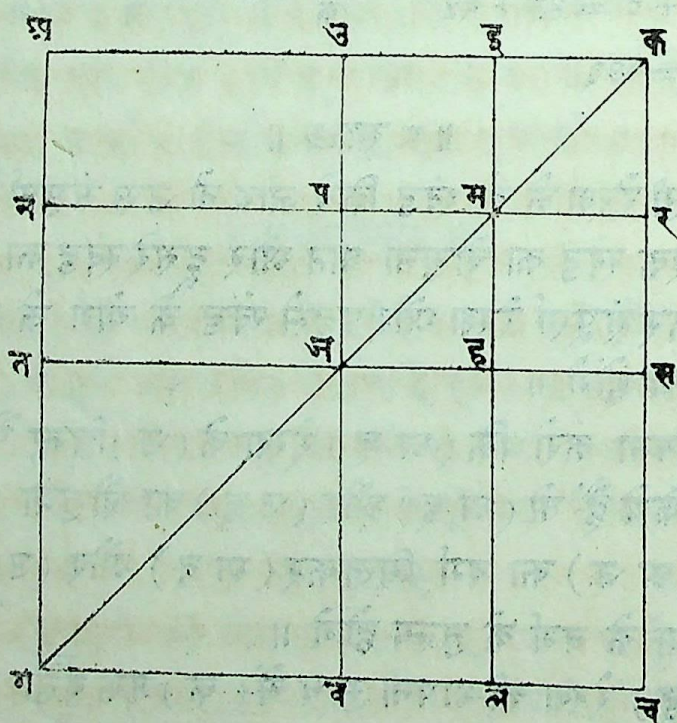
(अइ) रेखा को अपनी सीध में (क) तक बढ़ा कर

रूप २

सा० १३ (इ क) को (उ इ) के तुल्य कर लो (अ क) पर (अ ग च क) वर्ग क्षेत्र बनाओ और (क ग) रेखा करके (उ) (इ) चिन्हों से (उ ज ब) (इ म ल) रेखा (अग) वा (क च) की समानांतर कर लो फिर (म) और (ज) चिन्हों में होकर (न प र) और (त ज स) रेखा (अक) वा (ग च) की समानांतर खींच लो ॥

सा० २।४६

॥ उपपत्ति ॥

क्र० (उइ) और (इक) तुल्य हैं इसी से इन के सामने की (पम) और (मर) भी तुल्य हैं इसी प्रकार (जह) और (हस) भी तुल्य सिद्ध हो सक्ती हैं (उम) और (इर) समानांतर चतुर्भुज तुल्य हैं और (पह) और (मस) भी तुल्य हैं, परंतु (उम) और (मस), (उस) समानांतर चतुर्भुज के शेष समानांतर चतुर्भुज हैं

इस कारण वे तुल्य हैं तथा (इ र) और (प ह) भी तुल्य हैं इस कारण (उ म), (इ र), (प ह), (म स), ये चारों समानांतर चतुर्भुज तुल्य हैं इसी से सबों का योग, (उ म) से चौगुना है॥

तथा (उ इ) (प म) के तुल्य है, इस कारण (प ज) के भी तुल्य है, ऐसे ही (इ क) (इ म) के तुल्य है, इस कारण (उ प) के भी तुल्य है परंतु (उ इ) और (इ क) तुल्य हैं इस हेतु से (उ प) और (प ज) भी तुल्य हैं, अब क्योंकि (उ प) और (प ज) तुल्य हैं और (ज ह) (इ स) भी तुल्य हैं इस लिये इन आधारों पै के (अ प) और (न ज) तथा (ज ल) और (ह च) जात्यायत भी तुल्य हैं परंतु (न ज) और (ज ल) (न ल) समानान्तर चतुर्भु के शेष समानांतर चतुर्भुज हैं इस कारण वे तुल्य हैं और इसी से (अ प) और (ह च) भी तुल्य हैं, अर्थात् (अ प), (न ज), (ज ल), (ह च), ये चारों जात्यायत आपस में तुल्य हैं और इन सबों का योग (अ प) से चौगुना है और (उ म) (इ र), (प ह), (म स) का योग (उ म) से चौगुना साध ही चुके हैं, इसलिये इन आठों चतुर्भुजों के योग से जो (अ स ब) मापक बनता है, वह (अ म) से चौगुना है पर (अ म) जात्यायत (अ इ) और (इ म) के घात अर्थात् (अ इ) और (इ उ) के घात के समान है इस कारण (अ इ) और (इ उ) का चौगुना घात चौगुने (अ म) के समान है परंतु अभी ऊपर कह चुके हैं कि चौगुना (अ म) (अ स ब) मापक के समान है, इस हेतु से (अ इ) और (इ उ) का चौगुना घात (अ स ब) के तुल्य है इस में (न ब) अर्थात् (अ उ) का वर्ग जोड़ने से चौगुना (अ इ) और (इ उ) का घात

जुड़ा हुआ (अ उ) का वर्ग (अ स ब) और (त ब) के योग

स०२ के तुल्य है, परंतु (अ स ब) और (त ब) के योग से संपू-
र्ण (अ ग च क) क्षेत्र बनता है और यह क्षेत्र (अ क)
का वर्ग है इस लिये चौगुने (अ इ) और (इ उ) के घात
में जुड़ा हुआ (अ उ) का वर्ग (अ क) के वर्ग के समान
है अर्थात (अ इ) + (उ इ) के वर्ग के तुल्य है ॥

॥ अनुमान ॥

(अ इ) और (उ इ) का योग (अ क) है और (अ उ) इ
न का अन्तर है इस से जाना जाता है कि दो रेखाओं का
चार गुना घात और उन्हीं के अंतर का वर्ग उन दोनों के
योग के वर्ग के तुल्य होता है ॥

॥ दूसरा अनुमान ॥

ऊपर साध चुके हैं कि (उ क) का वर्ग (उ इ) के वर्ग से
चौगुना है इस से सिद्ध हुआ कि किसी रेखा का वर्ग अपनी आ
धी रेखा के वर्ग से चौगुना होता है ॥

अ इ = १२, इ उ = ४, अ उ = ८, अ क = १२ + ४ = १६

अ इ. इ उ = १२ × ४ = ४८

४ अ इ. इ उ = ४ × ४८ = १९२

अ उ^{२} = ८^{२} = ६४

अ क^{२} = १६^{२} = २५६

१९२ + ६४ = २५६

॥ ९ साध्य ॥

किसी रेखा के तुल्य और अतुल्य दो २ खंड कियेजाय तो अतुल्य खंडों के वर्गों का योग आधी रेखा और भाग बिंदुओं के बीच की रेखा के वर्गों के योग से दूना होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ रेखा के (उ) चिन्ह पे दो तुल्य और (क) पर दो अतुल्य खंड किये हैं तो (अ क) और (इ क) के वर्गों का योग (अ उ) और (उ क) के वर्गों के योग से दूना होगा (अ इ) रेखा पै (उ) चिन्ह से (उ ग) लंब खींच कर उस को (अ उ) वा (इ उ) के तुल्य कर लो फिर (ग अ) और (ग इ) रेखा करके (ग उ) के समानांतर (क च) खींचो और जहां वह (ग इ) रेखा को काटो वहां (च) चिन्ह मानकर (च) से

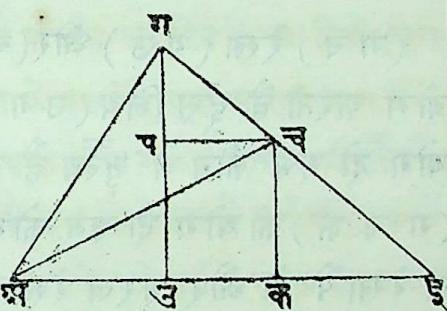
सा॰
१।२१

(च प) रेखा (अ ड़) के समानांतर कर लो और (अ च) रेखा भी कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्र सा० १।५ (अ उ) और (उ ग) तुल्य हैं, इस लिये (अ ग उ) और (ग अ उ) कोन भी तुल्य हैं पर (अ उ ग) सम कोन है इस कारण सा० १।३२ (अ ग उ) और (ग अ उ) कोनों का योग एक सम कोन के तुल्य है पर ये कोन आपस में भी तुल्य हैं इस लिये प्रत्येक आधे सम कोन के तुल्य है, इस रीति से (उ ग ड़) और (ग ड़ उ) भी आधे २ सम कोन के तुल्य हैं इस लिये संपूर्ण (अ ग ड़) कोन सम कोन है अब क्योंकि (प ग च) आधे सम कोन के तुल्य है और (ग प च) कोन (ग सा० १।२९ प च) कोन (ग उ ड़) अंतः कोन के अर्थात् एक सम कोन के तुल्य है, सा० १।३२ इस कारण शेष (ग च प) भी आधे सम कोन के तुल्य है अर्थात् (प ग च) कोन (ग च प) कोन के तुल्य है इसी कारण (ग प) और सा० १।६ (च प) भुजा भी तुल्य हैं ॥

तथा (च ड़ क) कोन आधे सम कोन के तुल्य है और (च क ड़) सा० १।२९ कोन (ग उ ड़) अंतः कोन अर्थात् सम कोन के तुल्य है, इस लिये (ड़ च क) शेष कोन भी आधे सम कोन के तुल्य है इस कारण (च ड़ क) और (ड़ च क) कोन तुल्य हैं और इसी हेतु से (क च) (क ड़) भुजा भी तुल्य है अब क्योंकि (अ उ) (उ ड़) के तुल्य है इस लिये (अ उ) का वर्ग भी (उ ड़) के वर्ग के तुल्य है इसी से (अ उ) और (उ ड़) का वर्ग योग (अ उ) के वर्ग से दूना है परंतु (अ उ ग) कोन सम कोन है, इस लिये (अ ग) का वर्ग (अ उ) और (उ सा० १।४७ ग) के वर्गों के योग के तुल्य है, अर्थात् (अ ग) का वर्ग (अ उ) के दूने वर्ग के तुल्य है, तथा (ग प) और (प च) तुल्य हैं, इस लिये,

(ग प) का वर्ग (च प) के वर्ग के तुल्य है और इन का वर्ग योग (च प) के दूने वर्ग के तुल्य है परंतु (ग च) का वर्ग (ग प) और (प च) के वर्ग योग के तुल्य है इस लिये (ग च) का वर्ग (प च) के दूने वर्ग अर्थात् (उ क) के दूने वर्ग के तुल्य है परंतु पहले लिख चुके हैं कि (अ ग) का वर्ग (अ उ) के वर्ग से दूना है इस लिये (अ ग) और (ग च) के वर्गों का योग (अ उ) और (उ क) के वर्गों के योग से दूना है, परंतु (अ ग च) सम कोन है इस लिये (अ च) वर्ग (अ ग) और (ग च) के वर्ग योग के तुल्य है और इसी से (अ उ) और (उ क) के वर्ग योग से दूना है परंतु (अ क च) सम कोन है इस लिये (अ च) का वर्ग (अ क) और (क च) के वर्ग योग के तुल्य है इस लिये (अ क) और (क च) के वर्गों का योग (अ उ) और (उ क) के दूने वर्ग योग के तुल्य है पर (क च) (क इ) के तुल्य है इस कारण (अ क) और (क इ) का वर्ग योग (अ उ) और (उ क) के वर्गों से दूना है॥

सा॰ १।४७ सा॰ १।२४ सा॰ १।४७ सा॰ १।४७

॥ १० साध्य ॥

दी हुई रेखा के तुल्य दो खंड किये जांय और किसी बिन्दु तक वह रेखा बढ़ाई जाय, तो बढ़ी हुइ समेत संपूर्ण रेखा का वर्ग और बढ़े हुए भाग का वर्ग, मिल कर दी हुई आधी रेखा के और बढ़ी हुई समेत आधी रेखा के वर्गों के योग से दूना होगा॥

कल्पना करो कि (अ इ) के (उ) बिन्दु पै तुल्य दो खंड किये हैं और उसे (क) तक बढ़ा दिया है, तो (अ क) और (इ क) का वर्ग योग (अ उ) और (उ क) के वर्ग योग से दूना होगा (अ इ) पर (उ) से (उ ग) लंब (उ इ) के तुल्य बना कर (अ ग) (इ ग) रेखा कर दो और (ग) से (अ इ) की समानांतर (ग च) रेखा खींच कर (उ ग) की समानांतर (क) से (क च) रेखा भी बना दो॥

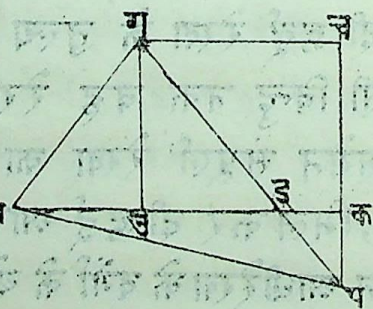
सा० १।११

॥ उपपत्ति ॥

(ग च) रेखा (ग उ) और (च क) दो समानांतर रेखाओं से योग करती है इस लिये (उ ग च) और (ग च क) कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य है इस कारण (इ ग च) और (ग च क) का योग दो सम कोन से छोटा है परंतु एक सरल रेखा पै दो और सरल रेखा उस की एक ही ओर ऐसे दो कोन बनावें कि जिन का योग दो सम कोन से छोटा हो, तो वे उसी ओर बढ़ाने से मिल जायगी इस कारण (ग इ) और (च क) बढ़ाने से (इ) और (क) की ओर मिलेंगी कल्पना करो कि (प) चिन्ह पर मिली हैं अब (अ प) रेखा कर दो तो क्योंकि (अ उ) और (उ ग) तुल्य हैं इस कारण (अ ग उ) कोन (उ अ ग)

सा० १।२६

स्व० १२

ह

कोन के तुल्य है और (अ उ ग) समकोन है इस कारण (अ ग उ) और (उ अ ग) प्रत्येक आधे सम कोन के तुल्य है, इसी प्रकार (उ ग इ) और (उ इ ग) प्रत्येक कोन आधे सम कोन के तुल्य है, इस कारण (अ ग इ) सम कोन है, और (ग इ उ) आधे सम कोन के तुल्य है, इस कारण (क इ प) सन्मुख कोन भी आधे सम कोन के तुल्य होगा, पर (इ क प) कोन (क उ ग) एकांतर कोन के तुल्य है इस कारण (इ क प) सम कोन और इसी से शेष (क प इ) आधे सम कोन के तुल्य होगा इस कारण (क प इ) और (क इ प) कोन तुल्य और इसी हेतु से (क इ) और (क प) भुज भी तुल्य हुए, अब क्योंकि (ग प च) आधे सम कोन के तुल्य और (ग च प) (ग उ क) सन्मुख कोन के तुल्य अर्थात् सम कोन है इस लिये (च ग प) शेष कोन भी आधे सम कोन के तुल्य है, इस कारण (च ग प) और (च प ग) कोन तुल्य और इसी से (च ग) (च प) भुजा भी तुल्य है॥

सा० २१५
सा० १।३२
सा० १।२९
सा० १।३४
सा० १।६

(अ उ) और (उ ग) तुल्य हैं, इस लिये उन के वर्ग भी तुल्य होंगे और उन के वर्गों का योग (अ उ) के दूने वर्ग के तुल्य होगा परंतु (अ ग) का वर्ग (अ उ) और (उ ग) के वर्ग योग के समान है, इसलिये (अ ग) का वर्ग भी (अ उ) के दूने वर्ग के तुल्य है तथा (च प) और (च ग) तुल्य हैं, इस लिये उन के वर्ग भी तुल्य होंगे, और दोनों वर्गों का योग (च ग) के दूने वर्ग के समान होगा परंतु (ग प) का वर्ग (च प) और (ग च) के वर्ग योग के तुल्य है, इस कारण (ग प) का वर्ग भी (ग च) अथवा (उ क) के दूने वर्ग के समान है और ऊपर लिख आये हैं कि (अ ग) का वर्ग (अ उ) के दूने वर्ग के तुल्य है इस लिये (अ ग) और (ग प) का वर्ग योग (अ उ) और (उ क) के दूने वर्ग योग के तुल्य है परंतु (अ प) का वर्ग (अ ग) और

सा० १।४
सा० १।४७
सा० १।३४

(ग प) के वर्ग योग के तुल्य है इस लिये (अ प) का वर्ग भी (अ उ) और (उ क) के दूने वर्ग योग के तुल्य होगा परन्तु (अ प) का वर्ग (अ क) और (क प) के वर्ग योग अर्थात् (अ क) और (क इ) के वर्ग योग के तुल्य है, इसलिये (अ क) और (क इ) का वर्ग योग, (अ उ) और (उ क) के दूने वर्ग योग के तुल्य सिद्ध हुआ॥

सा० १।४७

॥ ११ साध्य ॥

दी हुई रेखा के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड और संपूर्ण रेखा का घात दूसरे खंड के वर्ग के तुल्य हो॥

कल्पना करो कि (अ इ) दी हुई रेखा है उस के ऐसे दो खंड करो, कि एक खंड और संपूर्ण रेखा का घात दूसरे खंड के वर्ग के समान हो। (अ इ) रेखा पर (अ उ क इ) वर्ग क्षेत्र बनाकर (अ उ) के (ग) चिन्ह पर तुल्य दो खंड करो, और (इ ग) रेखा कर दो फिर (उ अ) को (च) तक बढ़ाकर, (ग च) को (ग इ) के तुल्य कर लो, और (अ च) पर (अ च प ब) वर्ग क्षेत्र बनालो तो (अ इ) रेखा के (ब) चिन्ह पर ऐसे दो खंड हो जायगे, कि एक खंड और संपूर्ण रेखा का घात दूसरे खंड के वर्ग के तुल्य होगा (प ब) को (म) तक बढ़ा दो॥

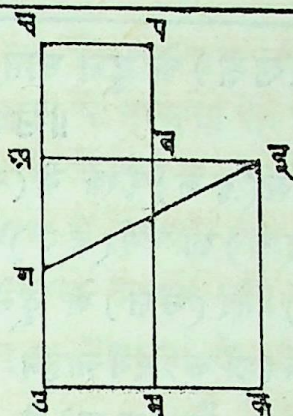
सा० १।३

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि (अ उ) रेखा के (ग) चिन्ह पर तुल्य दो खंड हुए हैं और वह (च) तक बढ़ाई भी गई है, इस लिये (उ च) और (च अ) का घात और (अ ग) का वर्ग मिलकर (ग च) वा (ग इ) अर्थात् (ग अ) और (अ इ) के वर्गों के योग के तुल्य होगा इन में से उभय निष्ठ (अ ग) का वर्ग निकाल डालने से, शेष

६

सा० १।४७

(उ च) और (च अ) का घात शेष (अ इ) के वर्ग के समान रहेगा, परंतु (च म) क्षेत्र (उ च) और (च प), अर्थात् (उ च) और (च अ) के घात के और (अ क) क्षेत्र (अ इ) के वर्ग के तुल्य है इसी से (अ क) क्षेत्र (च म) क्षेत्र, के तुल्य है इन में से उभय निष्ट (अ म) खंड निकाल डालने से शेष (च ब) और (ब क) तुल्य रहेंगे परंतु (कद) खंड, (ब इ) और (इ क), अर्थात् (बइ) और (अ इ) के घात के और (च ब) (अ ब) के वर्ग के तुल्य है, इस लिये (अ इ) और (ब इ) का घात (अ ब) के वर्ग के तुल्य है और (ब) चिन्ह पर (अ इ) के अभीष्ट दो खंड हो गये हैं ॥

ख० ३

प० ३

ख० ३

॥ १२ साध्य ॥

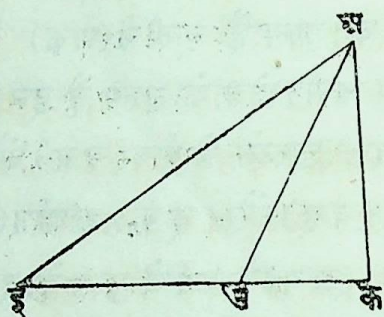
अधिक कोन त्रिभुज में न्यून कोण से सन्मुखकी बर्द्धित भुजा पे जो लंब गिरता है, उस के और अधिक कोन के बीच की रेखा और उस भुज के दूने घात के समान, अधिक कोन के सन्मुख वाले भुज का वर्ग शेष दो भुजों के वर्गों के योग से अधिक होता है ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) एक त्रिभुज, उस का (अ उ इ) अधिक कोन और (अ) चिन्ह से (अ क) लंब, (इ उ) बढ़ी हुई रेखा पर डाला है तो (अ इ) का वर्ग (अ उ) और (उ इ) के वर्गों के योग से (इ उ)

मा० १।१२

और (उक) के दूने घात के तुल्य बड़ा होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

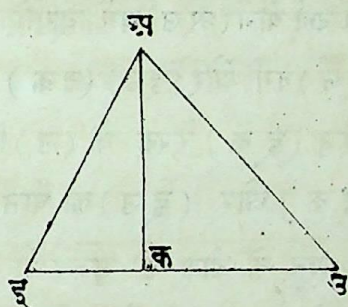
क्योंकि (इक) रेखा के (उ) चिन्ह पर दो खंड हुए हैं इस लिये (इक) का वर्ग (इउ) और (उक) के वर्ग योग और (इउ) और (उक) के दूने घात के योग के तुल्य है, इन दोनों में (अक) वर्ग जोड़ने से, (इक) और (अक) के वर्गों का योग (इउ) (उक) और (अक) के वर्ग योग और (इउ) और (उक) के दूने घात के योग के तुल्य होगा परंतु (अकइ) सम कोन है, इस लिये (अइ) का वर्ग (अक) और (इक) के वर्गों के योग के और (अउ) का वर्ग, (अक) और (उक) के वर्ग योग के समान है, इस लिये (अइ) का वर्ग (अउ) और (उइ) के वर्ग योग और (इउ) (उक) के दूने घात के योग के तुल्य है अर्थात् (अइ) का वर्ग, (अउ) और (इउ) के वर्ग योग से, (इउ) और (उक) के दूने घात के तुल्य अधिक है ॥

स्० १ सा० ४ स्० २ सा० १ ४७

॥ २३ साध्य ॥

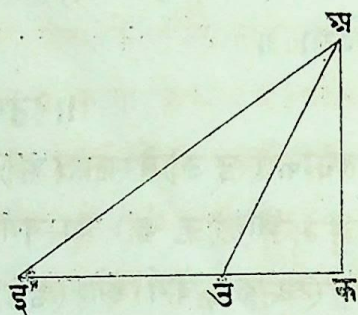
त्रिभुज में न्यून कोन के साम्हने वाले भुज का वर्ग शेष दो भुजों के वर्ग योग से एक भुज और उस पर साम्हने के कोण से पड़े लंब और उस न्यून कोण के बीच के खंड के दूने घात के तुल्य छोटा होता है ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज उस का (इ) न्यून कोन और (इ उ) भुज पै सन्मुख के (इ अ उ) कोन से (अ क) लंब डाला है तो (अ उ) का वर्ग (अ इ) और (इ उ) के वर्ग योग से (उ इ) और (इ क) के दूने घात के तुल्य छोटा होगा प्रथम यह बात जानो कि (अ क) लंब, (अ इ उ) त्रिभुज के भीतर ही गिरेगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि (इ उ) रेखा के (क) चिन्ह पर दो खंड भए हैं इस लिये (इ उ) और (इ क) का वर्ग योग (उ क) वर्ग और (इ उ) (इ क) के दूने घात के योग के तुल्य होगा इन में (अ क) का वर्ग जोड़ने से (इ उ) (इ क) और (अ क) का वर्ग योग (उ क) और (अ क) के वर्ग योग और (इ उ) (इ क) के दूने घात के योग के तुल्य होगा परन्तु (क) चिन्ह पर का हर एक सम कोन है इस कारण (अ इ) का वर्ग (अ क) और (क इ) के वर्ग योग के और (अ उ) का वर्ग (अ क) और (क उ) के वर्ग योग के तुल्य है इस लिये (इ उ) और (अ इ) का वर्ग योग, (अ उ) वर्ग और (इ उ) (इ क) के दूने घात के योग के तुल्य है अर्थात् (अ उ) का वर्ग (इ उ) और (अ इ) के वर्ग योग से (इ उ) और (इ क) के दूने घात के तुल्य छोटा है ॥

दूसरे कल्पना करो कि (अ क) लम्ब (अ इ उ) त्रिभुज से बाहर गिरता है ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि (क) चिन्ह पर का कोन सम कोन है इस कारण (अ उ इ) कोन एक सम कोन में बड़ा है इस लिये (अ इ) का वर्ग (अ उ) और (इ उ) के वर्ग योग और (इ उ) (उ क) के दूने घात के योग के तुल्य है इस में (इ उ) का वर्ग जोड़ने से (अ इ) और (इ उ) का वर्ग योग (अ उ) वर्ग द्विगुणित (इ उ) वर्ग और (इ उ) (उ क) के दूने घात के योग के तुल्य होगा परंतु (इ क) रेखा के (उ) चिन्ह पर दो खंड हुए हैं इस लिये (इ क) और (इ उ) का घात (इ उ) वर्ग और (इ उ) (उ क) के घात के योग के तुल्य है परंतु तुल्य वस्तुओं के दूने भी आपस में तुल्य होते हैं इस लिये (इ क) और (इ उ) का दूना घात द्विगुणित (इ उ) वर्ग और दूने (इ उ) (उ क) के घात के योग के तुल्य है इस कारण (अ इ) और (इ उ) का वर्ग योग (अ उ) वर्ग और (इ क) (इ उ) के दूने घात के योग के तुल्य है अर्थात् (अ उ) का वर्ग, (अ इ) और (इ उ) के वर्ग योग से (इ क) और (इ उ) के दूने घात के तुल्य छोटा है ॥

सा० १।१२६

सा० १।१२

स्व० ३

सा० ३

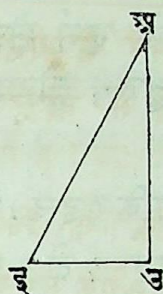
अ

इ उ क

॥ तीसरा प्रकार ॥

कल्पना करो कि (अ उ) भुजा (इ उ) पर लंब है, तथा (इ) कोन

ऋौर (ऋ उ) लंब के बीच में का खंड (इ उ) भुजा ही है तो क्योंकि (ऋ इ) वर्ग, (इ उ) ऋौर (ऋ उ) के वर्ग योग के तुल्य है, (इस) लिये (ऋ इ) ऋौर (इ उ) का वर्ग योग, (ऋ उ) वर्ग ऋौर द्विगुणित (इ उ) वर्ग के योग, के, ऋर्थात् (ऋ उ) वर्ग ऋौर (इ उ), (इ उ) के दूने घात, के योग के तुल्य है ॥

ऋ
इ उ

सा० २।४७

॥ १४ साध्य ॥

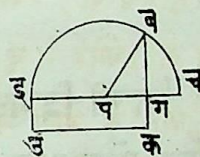
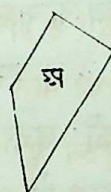
एक ऐसा वर्ग क्षेत्र बनाऋो जो दिये हुए एक ऋजुभुज क्षेत्र के तुल्य हो ॥

कल्पना करो कि (ऋ) एक ऋजुभुज क्षेत्र है, ऋब चाहते हैं कि इस के समान वर्ग क्षेत्र बनाऋो, तो (इ उ क ग) सम कोन समानांतर चतुर्भुज (ऋ) क्षेत्र के तुल्य बनाऋो ऋब इस क्षेत्र की (इ ग) ऋौर (ग क) भुजा तुल्य हों, तो यही ऋभीष्ट वर्ग क्षेत्र होगा जैसा कि हमें इष्ट था, परन्तु ये भुजा तुल्य न हों तो उन में से (इ ग) को (च) तक बढ़ा कर (ग च) को (ग क) के तुल्य बनालो तथा (इ च) के (प) चिन्ह पै तुल्य दो खंड कर के (प) केन्द्र से (प इ) वा (प च) त्रिज्या से (इ व च) ऋर्द्ध वृत्त बनालो ऋौर (क ग) को बढ़ा कर (व) चिन्ह से जा मिलाऋो ऋब (ग व)

ऋ
व
इ प ग च
उ क

सा० २।४५

प० १।३०

सा० १।१०

सा० ३।३

पर जो वर्ग क्षेत्र बनेगा वह (अ) ऋजुभुज क्षेत्र के तुल्य होगा (प ब) रेखा कर दो ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि (इ च) रेखा के (र) चिन्ह पर तुल्य और (ग) चिन्ह पर अतुल्य दो २ खंड हुए हैं इस लिये (इ ग) और (ग च) का घात और (प ग) वर्ग मिल कर (प च) के वर्ग वा (प ब) के वर्ग अर्थात् (प ग) और (ग ब) के वर्ग योग के तुल्य होंगे इन में से उभयनिष्ठ (प ग) का वर्ग निकाल डालो तो शेष (इ ग) और (ग च) का घात शेष (ब ग) के वर्ग के तुल्य रहेगा परंतु (इ क) समानांतर चतुर्भुज (इ ग) और (ग क) के घात अर्थात् (इ ग) और (ग च) के घात के तुल्य है इस लिये वह (ग ब) के वर्ग के भी तुल्य है पर (इ क) (अ) क्षेत्र के तुल्य है इस कारण (ग ब) का वर्ग भी (अ) क्षेत्र के तुल्य होगा ॥

सा० १५ सा० १४७ स्व० ३ क्र० पृ० १६

॥ अ साध्य ॥

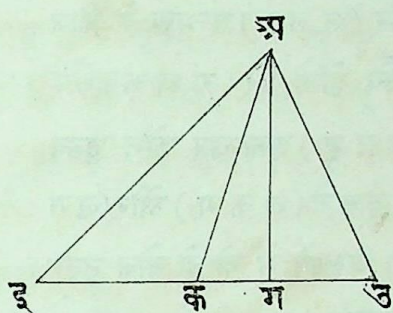
किसी त्रिभुज की एक भुजा के तुल्य दो खंड किये जांय और भाग चिन्ह से सन्मुख के कोन तक एक रेखा कर दी जाय तो अर्द्ध भुज और उस रेखा के वर्गों के योग से शेष भुजों के वर्गों का योग दूना होगा ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज की (इ उ) भुजा के (क) चिन्ह पर तुल्य दो खंड करके सन्मुख के कोन तक (क अ) रेखा कर दी है तो (अ इ) और (अ उ) के वर्गों का योग (इ क) और (अ क) के वर्गों के योग से दूना होगा ॥

सा० ११२

(अ) चिन्ह से (इ उ) पर (अ ग) लम्ब कर लो ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि (इ ग अ) सम कोन है इस लिये (अ इ) का वर्ग (इ ग) और (अ ग) के वर्ग योग के तुल्य होगा इसी कारण अउ का वर्ग भी (उ ग) और (अ ग) के वर्ग योग के तुल्य होगा, इस लिये (अ इ) और (अ उ) का वर्ग योग (इ ग) वर्ग (उ ग) वर्ग और द्विगुणित (अ ग) वर्ग के योग के तुल्य है परंतु (इ उ) रेखा के (क) चिन्ह पर तुल्य, और (ग) पर अतुल्य खंड किये गये हैं इस लिये (इ ग) और (उ ग) का वर्ग योग (इ क) और (क ग) के दूने वर्ग योग के तुल्य है इसी से अ इ और (अ उ) का वर्ग योग (इ क) (क ग) और (ग अ) के दूने वर्ग योग के तुल्य है, परन्तु (क ग) और (अ ग) का वर्ग योग (अ क) के वर्ग के तुल्य है इस लिये (क ग) और (अ ग) का दूना वर्ग योग (अ क) के दूने वर्ग के तुल्य होगा इसी से (अ इ) और (अ उ) का वर्ग योग भी (इ क) और (क अ) के दूने वर्ग योग के तुल्य है ॥

सा० १।४७

सा० २।९

सा० १।४७

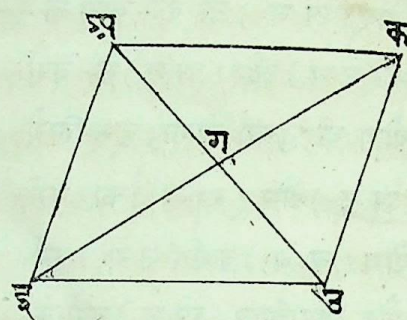
॥ ६ साध्य ॥

समानांतर चतुर्भुज के दोनों कर्णों के वर्गों का योग चारों भुजों के वर्ग योग के तुल्य होता है ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ क) समानांतर चतुर्भुज और उस के (अ उ) (इ क) कर्ण हैं तो (अ उ) और (इ क) के वर्गों का योग (अ इ) (इ उ) (उ क) और (क अ) के वर्गों के योग के तुल्य होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

कल्पना करो कि (इ क) और (अ उ) कर्णों का योग (ग) चिन्ह पर होता है तो (अ ग क) और (उ ग इ) सन्मुख के कोन

सा० १।१५ तुल्य होंगे पर (ग अ क) और (ग उ इ) एकान्तर कोन तुल्य हैं इस से (अ क ग) और (उ ग इ) त्रिभुजों में दो दो कोन तुल्य सा० १।३४ हैं परन्तु (अ क) और (इ उ) तुल्य कोनों के सन्मुख की भुजा भी तुल्य हैं इसी से शेष तुल्य कोनों के सन्मुख की शेष भुजा भी तुल्य होंगी अर्थात (अ ग) (ग उ) के और (इ ग) (ग क) के तुल्य होगी अब क्यों कि (इ क) रेखा के (ग) चिन्ह पर तुल्य दो खंड हुए हैं इस कारण (अ इ) और (अ क) का वर्ग योग (इ ग) और (अ ग) के दूने सा० २।अ वर्ग योग के तुल्य है, ऐसे ही (इ उ) और (उ क) का वर्ग योग, (इ ग) और (ग उ) अर्थात् (इ ग) और (अ ग) के दूने वर्ग योग के तुल्य है इस रीति से (अ इ) (अ क) (क उ) और (उ इ) का वर्ग योग (इ ग) और (अ ग) के चौगुने वर्ग योग के तुल्य हुआ परंतु (इ क) का वर्ग (इ ग) के चौगुने (अ उ) का वर्ग (अ ग) के चौगुने वर्ग के तुल्य है इस लिये (अ उ) और (इ क) का वर्ग योग भी (अ इ) (अ क) (क उ) और (इ उ) के वर्ग योग के तुल्य है ॥

॥ अनुमान ॥

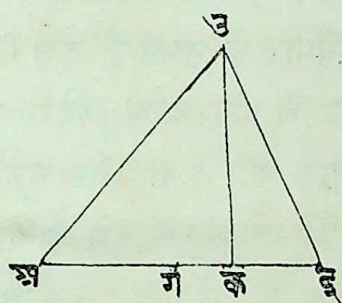
इस से यह बात भी जानी जाती है कि समानांतर चतुर्भुज के कर्ण आपस में एक दूसरे के तुल्य दो २ खंड करते हैं ॥

॥ ३ साध्य ॥

त्रिभुज में आवाधाओं * के वर्गों का अंतर, शेष भुजों के वर्गों के अंतर के तुल्य होता है ॥

कल्पना करो कि (अ इ उ) त्रिभुज में (अ इ) आधार पै (उ क) लंब पड़ा है तो (अ उ) और (इ उ) का वर्गांतर (अ क) और (क इ) के वर्गांतर के तुल्य होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि (अ उ) का वर्ग (अ क) और (क उ) के वर्ग योग के तुल्य और (इ उ) का वर्ग (इ क) और (क उ) के वर्ग योग के तुल्य है इस लिये (अ उ) और (उ इ) का वर्गांतर (अ क) और (क उ) के वर्ग योग और (इ क) और (क उ) के वर्ग योग के अंतर के तुल्य है अर्थात् उभय निष्ठ (उ क) वर्ग लेडालने से (अ उ) और (उ इ) का वर्गांतर (अ क) और (क इ) के वर्गांतर के तुल्य होगा ॥

सा॰ १।४७

॥ अनुमान ॥

त्रिभुज की जिस भुजा पै लंब गिरे, उस के आधे पै चिन्ह कर दिया जाय तो उस अर्द्ध चिन्ह और लंब के बीच का जो खंड है उस के और संपूर्ण आधार के घात से शेष भुजों के योग और अंतर का घात दूना होगा ॥

---

* सामने के कोण से पडे हुए लंब से जो भुज के दो खंड होते हैं उन को आवाधा बोलते हैं ॥

कल्पना करो कि (अ इ) आधार के (ग) चिन्ह पर तुल्य दो खं-ड होते हैं तो (अ उ) और (इ उ) के योग और अंतर का घात (अ इ) और (ग क) के घात से दूना होगा ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि (अ ग) और (ग क) का योग वा (ग इ) और (ग क) का योग अथवा (इ क) और दूने (ग क) का योग (अ क) के तु-ल्य है कारण यह है कि (ग इ) (इ क) और (ग क) के योग के तुल्य है इस लिये (अ क) और (क इ) का अंतर दूने (ग क) के तु-ल्य होगा ॥

अब क्योंकि (अ उ) और (उ इ) का वर्गान्तर (अ क) और (क इ) के वर्गांतर के तुल्य है इस लिये (अ उ) और (इ उ) के योग और अंतर का घात (अ क) और (क इ) के योग और अंतर के घात के तुल्य वा (अ इ) और दूने (ग क) के घात के तुल्य अथवा (अ इ) और (ग क) के दूने घात के तुल्य है ॥

॥ २ अनुमान ॥

दी हुई रेखा के किसी बिंदु पर लंब खड़ा किया जाय और उस लंब के एक एक बिन्दु से दो दो रेखा निकलकर उस दी हुई रेखा के सिरों से जालगें तो उन दो दो रेखाओं के वर्गांतर तुल्य होंगे ॥

॥ उपपत्ति ॥

क्योंकि जो एक बिंदु से दो दो रेखा निकली हैं उन प्रत्येक का वर्गांतर आबाधाओं के वर्गांतर के तुल्य होगा ॥